J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
8 (1973) 125-134

COURBURE D'ORDRE p ET LES CLASSES DE PONTRJAGIN

ANN STEHNEY

Nous allons étudier d'après Thorpe la courbure d'ordre p (p-courbure) d'une variété riemannienne M. La 2-courbure est la courbure riemannienne ordinaire de M. La p-courbure ($p > 2$) est strictement plus faible que la 2-courbure, mais leurs interprétations géométriques sont semblables. Dans ce travail nous trouverons les classes caractéristiques de Pontrjagin de M par rapport aux tenseurs de p-courbure. Ceci nous permettra de donner des conditions locales sur la courbure qui entraînent la nullité de certaines classes de Pontrjagin de M. En particulier on obtient les résultats de Thorpe [7], Chern [1], Cheung et Hsiung [2], et Gray [3].

Si p est un entier pair, le tenseur riemannien de courbure d'ordre p (voir [8]) en un point $m \in M$ est une application linéaire auto-adjointe R_p de $\Lambda^p(M_m)$ donnée par

$$\begin{aligned} &\langle R_p(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p), v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle \\ (1) \qquad &= \frac{1}{2^{p/2} p!} \sum_{\alpha,\beta \in S_p} \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) R(u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, v_{\beta_1}, v_{\beta_2}) \cdots R(u_{\alpha_{p-1}}, u_{\alpha_p}, v_{\beta_{p-1}}, v_{\beta_p}) \,, \end{aligned}$$

où $u_i, v_j \in M_m$, S_p est le groupe des permutations des entiers $(1, \cdots, p)$, $\varepsilon(\alpha)$ est la signature de α, et R est le tenseur (ordinaire) de courbure de M. Le théorème suivant nous donne les classes de Pontrjagin de M par rapport aux tenseurs R_p.

Théorème 4.1. *Soit M une variété riemannienne et R_{2k} son tenseur de courbure d'ordre $2k$. Alors*

$$\frac{[(2k)!]^2}{[2^k k!]^2 (2\pi)^{2k}} \operatorname{Alt} R_{2k}{}^2$$

est une forme différentielle de M de degré $4k$ qui est fermée et qui représente $\mathscr{P}_k(M)$, la k^e classe de Pontrjagin de M.

Considérons un tenseur du type $R_p(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p) = cAu_1 \wedge \cdots \wedge Au_p$, où $c \in \boldsymbol{R}$ et $A\colon M_m \to M_m$ est une application auto-adjointe. On notera $R_p = cA^p$. Nous avons le

Received October 13, 1971.

Théorème 4.5. *Soit M compact et orientable. Si, en chaque point $m \in M$ ils existent $c \in \boldsymbol{R}$ et $A: M_m \to M_m$ tels que $R_{2k} = cA^{2k}$, les classes $\mathscr{P}_q(M)$ sont nulles pour tout $q \geq k$.*

Le cas $k = 1$ est le théorème de Chern [1]. Cheung et Hsiung [2] ont obtenu lam ême conclusion avec une condition algébrique sur R. Nous montrerons que leur condition entraîne $R_{2k} = cA^{2k}$ et nous donnerons un contre-exemple à la réciproque. Si les A satisfont de plus une identité de Bianchi (condition différentielle), Gray [3] obtient que les classes $\mathscr{P}_q(M)$ sont nulles pour $q \geq k$. Il présente comme exemple l'hypersurface $M^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ où A est la deuxième forme fondamentale de M. Le cas $A =$ l'identité est un théorème de Thorpe [7].

1. Les tenseurs de courbure d'ordre p

Soit V un espace vectoriel de dimension n, muni de la métrique g, et p un entier positif. L'espace $\Lambda^p = \Lambda^p(V)$ des p-vecteurs de V possède une métrique naturelle, donnée sur les p-vecteurs décomposables (qui contient Λ^p) par

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle = \det [g(u_i, v_j)] ,$$

où $u_i, v_j \in V$. Un *tenseur de courbure d'ordre p* de V est un opérateur linéaire auto-adjoint (o.l.a.-a.) $T: \Lambda^p \to \Lambda^p$ (voir [6]). Ces tenseurs forment eux-mêmes un espace vectoriel $\mathscr{R}$ muni de la métrique

$$\langle T, S \rangle = \operatorname{tr} T \circ S .$$

Si $T \in \mathscr{R}$ on peut considérer sa *courbure sectionnelle* σ_T, une fonction numérique de la *variété de Grassmann* $\mathscr{G}$ des plans orientées $P \subset V$ avec dimension $P = p$. $\mathscr{G}$ s'identifie avec l'ensemble de p-vecteurs décomposables de longueur 1:

$$P \leftrightarrow u_1 \wedge \cdots \wedge u_p ,$$

où $\{u_1, \cdots, u_p\}$ est une base orthonormale orientée du plan P. Avec cette correspondence,

$$\sigma_T(P) = \langle T(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p), u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \rangle . \tag{2}$$

Même si nous considérons V quelconque, le cas intéressant est celui où p est pair, $V = M_m$ ($m \in M$) et $T = R_p$.

Rappelons [6] la décomposition en somme directe orthogonale $\mathscr{R} = \mathscr{B} \oplus \mathscr{S}$. $\mathscr{B}$ est le sous-espace des tenseurs T satisfaisant *l'identité de Bianchi*:

$$\sum_{\gamma \in S_{p+1}} \varepsilon(\gamma) \langle T(u_{\gamma_1} \wedge \cdots \wedge u_{\gamma_p}), u_{\gamma_{p+1}} \wedge u_{p+2} \wedge \cdots \wedge u_{2p} \rangle = 0 \tag{3}$$

pour tout $u_1, \cdots, u_{2p} \in V$. $\mathscr{S}$ est le sous-espace des *relations de Grassmann*:

$$\text{Pour que } \alpha \in \Lambda^p \text{ soit décomposable il faut et il suffit que } \langle S\alpha, \alpha\rangle = 0 \text{ pour tout } S \in \mathscr{S}. \tag{4}$$

Puisque tout $P \in \mathscr{G}$ correspond à un p-vecteur décomposable on voit que la courbure sectionnelle de $S \in \mathscr{S}$ est identiquement nulle. En effet cette propriété-ci sert à caractériser l'espace $\mathscr{S}$:

$$S \in \mathscr{S} \text{ équivaut à } \sigma_S \equiv 0 \,, \tag{5}$$

d'où

$$T \in \mathscr{B} \text{ et } \sigma_T \equiv 0 \quad \text{entraînent} \quad T \equiv 0 \,. \tag{6}$$

Thorpe a vérifié que R_p satisfait (3). Comme la fonction d'identité I: $\Lambda^p \to \Lambda^p$ le satisfait et comme $\sigma_I \equiv 1$, il s'en suit que

$$\sigma_{R_p} \equiv c \quad \text{entraîne} \quad R_p = cI. \tag{7}$$

On démontre les resultats ci-dessus dans [5] et [6].

2. Tenseurs induits

Soit A: $V \to V$ un o.l.a.-a. L'opérateur

$$A^p\colon u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \mapsto Au_1 \wedge \cdots \wedge Au_p$$

est dit l'opérateur induit sur Λ^p par A. Il est clair que A^p est linéaire; on vérifie sans difficulté que A^p est auto-adjoint, donc un tenseur de courbure. Un simple calcul donne la

Proposition 2.1. *L'ensemble des tenseurs ainsi induits est invariant sous l'effet du groupe orthogonal* $\mathrm{O}(V)$; *d'ailleurs,*

$$(\mathrm{ad}\, g)A^p = (\mathrm{ad}\, g\, A)^p$$

pour tout $g \in \mathrm{O}(V)$.

La proposition suivante est un cas spécial d'un théorème de Kulkarni [4]: dans l'anneau des structures de courbure l'ensemble de ceux qui satisfont l'identité de Bianchi est fermé sous la multiplication. Dans notre cas la symétrie de A est l'identité de Bianchi ($p = 1$). Une démonstration directe de 2.2 existe [5] mais elle est plus longue qu'intéressante.

Proposition 2.2. *A^p satisfait l'identité de Bianchi.*

Revenons au cas $V = M_m$ où M est une variété riemannienne. Etant donnés des nombres réels $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$. Soient $I = (i_1, i_2, \cdots, i_p)$ et $J = (j_1, j_2, \cdots, j_p)$ tels que i_h et j_m sont des entiers positifs et $\leq n$. Posons

$$A_{IJ} = \det [a_{i_h j_m}] \qquad (h, m = 1, \cdots, p) .$$

Considérons une base orthonormale $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de M_m. R_{ijkl} désigne $R(e_i, e_j, e_k, e_l)$.

Cheung et Hsiung [2] considèrent la condition: il existe $c \in \boldsymbol{R}$ tel que

$$(8) \qquad \sum_{\gamma \in S_p} \varepsilon(\gamma) R_{i_{\gamma(1)} i_{\gamma(2)} j_1 j_2} \cdots R_{i_{\gamma(p-1)} i_{\gamma(p)} j_{p-1} j_p} = 2^{p/2} c_p A_{IJ}$$

pour tous ensembles I, J. Si $p = 2$ c'est la condition

$$(9) \qquad R_{ijkl} = c_2(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk})$$

etudiée par Chern [1].

Théorème 2.3. *La condition* (8) *entraîne $R_p = c_p A^p$ où $A: M_m \to M_m$ est représenté par la matrice $A = [a_{ij}]$ relativement à la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Si $p = 2$,* (8) *équivaut à $R = c_2 A^2$.*

Démonstration. La condition (8) nous donne l'avant-dernière ligne du calcul suivant:

$$\begin{aligned}
&\langle c_p A^p(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}), e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} \rangle \\
&\quad = c_p \langle A e_{i_1} \wedge \cdots \wedge A e_{i_p}, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} \rangle \\
&\quad = c_p \det \langle A e_{i_\alpha}, e_{j_\beta} \rangle = c_p A_{IJ} \\
&\quad = \frac{1}{2^{p/2}} \sum_{\gamma \in S_p} \varepsilon(\gamma) R_{i_{\gamma(1)} i_{\gamma(2)} j_1 j_2} \cdots R_{i_{\gamma(p-1)} i_{\gamma(p)} j_{p-1} j_p} \\
&\quad = \langle R_p(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}), e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} \rangle .
\end{aligned}$$

La dernière ligne est la définition de R_p.

Si $p = 2$, $R = c_2 A^2$ entraîne (9):

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \langle R(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l \rangle = c_2 \langle A(e_i) \wedge A(e_j), e_k \wedge e_l \rangle \\
&= c_2 \det \begin{bmatrix} \langle A(e_i), e_k \rangle & \langle A(e_i), e_l \rangle \\ \langle A(e_j), e_k \rangle & \langle A(e_j), e_l \rangle \end{bmatrix} = c_2(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk}) .
\end{aligned}$$

Corollaire 2.4. *La condition* (8) *avec $a_{ij} = \delta_{ij}$ entraîne $\sigma_{R_p} \equiv c_p$.*

Démonstration. En vertu du théorème 2.3, $R_p = c_p I^p$ où $I: V \to V$ est l'identité. Donc pour $\alpha \in \Lambda^p$, $R_p(\alpha) = c_p \alpha$ et $\sigma_{R_p}(P) = \langle R_p(P), P \rangle = c_p \| P \|^2 = c_p$.

L'algèbre des structures de courbure (Kulkarni, [4]) donne le lemme suivant.

Lemme 2.5. *Soient $p_1, \cdots, p_k$ des entiers pairs et positifs, $m_1, \cdots, m_k$ des entiers non-négatifs, et $q = \sum_{i=1}^k m_i p_i \leq n$. Si $R_{p_i} = c_{p_i} A^{p_i}$ $(i = 1, \cdots, k)$,*

$$R_q = (c_{p_1})^{m_1} \cdots (c_{p_k})^{m_k} A^q .$$

En générale ($p > 2$), $R_p = c_p A^p$ n'entraîne pas la condition (8) au fond parce que R_p ne détermine pas le tenseur R. Par exemple soit $\{e_1, \cdots, e_5\}$ une base orthonormale de l'espace V. Définissons R qui satisfait l'identité de Bianchi par

$$R(e_1 \wedge e_2) = 0 ,$$

$$R(e_i \wedge e_j) = \begin{cases} e_i \wedge e_j \quad , & i < j \text{ tels que } i = 1 \text{ ou } 2, j > 2 , \\ (2/3)e_i \wedge e_j , & 2 < i < j . \end{cases}$$

$R_4 = (2/3)I\colon \Lambda^4 \to \Lambda^4$, donc l'application R_4 est induite par une application de V, c'est-à-dire l'identité. Avec $I = J = (1, 2, 3, 4)$ le terme de gauche de (8) devient

$$\sum_{\gamma \in S_4} \varepsilon(\gamma) R_{\gamma_1\gamma_2 12} R_{\gamma_3\gamma_4 34} = 0$$

puisque $R(e_1 \wedge e_2) = 0$. Avec $I = (1, 2, 3, 4)$ et $J' = (1, 3, 4, 2)$ le terme de gauche de (8) devient

$$\sum_{\gamma \in S_4} \varepsilon(\gamma) R_{\gamma_1\gamma_2 13} R_{\gamma_3\gamma_4 42} = 4 .$$

Mais quelque soit A, $A_{IJ} = A_{IJ'}$ et en chaque cas ci-dessus le terme de droite de (8) est $4c_4 A_{IJ}$. On voit immédiatement qu'il n'existe pas A satisfaisant la condition (8). Remarquons que la courbure sectionnelle de R_4 est identiquement égale à $2/3$.

Cet exemple montre la faiblesse de R_p ($p > 2$). R_4 est une application induite pendant que $R = R_2$ ne l'est pas. C'est un contre-exemple au lemme 3.4 de Cheung et Hsiung qui maintient que la courbure sectionnelle de R_p est constante si et seulement si (8) et $a_{ij} = \delta_{ij}$. Leur théorème 3.1 est cependant valable comme nous allons voir.

3. L'opérateur Alt

Soit p un entier pair. Désignons par Alt l'opérateur linéaire $\mathscr{R} \to \mathscr{R}$ d'antisymétrie:

$$\begin{aligned} &\langle \operatorname{Alt} T(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p), w_{p+1} \wedge \cdots \wedge w_{2p} \rangle \\ (10) \qquad &= \frac{1}{(2p)!} \sum_{\alpha \in S_{2p}} \varepsilon(\alpha) \langle T(w_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge w_{\alpha_p}), w_{\alpha_{p+1}} \wedge \cdots \wedge w_{\alpha_{2p}} \rangle , \end{aligned}$$

si $T \in \mathscr{R}$ et $w_1, \cdots, w_{2p} \in V$. Il est clair que Alt T est auto-adjoint si p est pair.

Lemme 3.1. $\{\operatorname{Alt} T \mid T \in \mathscr{R}\}$ *est isomorphe à l'espace* $(\Lambda^{2p})^*$ *des formes de* V *de degré* $2p$.

Démonstration. Un isomorphisme de $(\Lambda^{2p})^*$ dans $\{\operatorname{Alt} T\}$ est défini par

$$\varphi \in (\Lambda^{2p})^* \to T_\varphi \in \mathscr{R} ,$$

où

$$\langle T_\varphi(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p), w_{p+1} \wedge \cdots \wedge w_{2p}\rangle = \varphi(w_1, \cdots, w_{2p}) .$$

L'antisymétrie de T_φ entraîne Alt $T_\varphi = T_\varphi$.

Réciproquement, pour chaque $T \in \mathscr{R}$, Alt T détermine une forme de V de degré $2p$, c'est-à-dire celle dont la valeur sur $(w_1, \cdots, w_{2p})$ est

$$\langle \mathrm{Alt}\, T(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p), w_{p+1} \wedge \cdots \wedge w_{2p}\rangle$$

pour tous $w_1, \cdots, w_{2p} \in V$.

Théorème 3.2. *Si $T \in \mathscr{B}$, Alt $T = 0$.*

Démonstration. Pour tous $w_1, \cdots, w_{2p} \in V$, la ligne (10) est égale à

$$\frac{(p-1)!}{(2p)!} \sum_{\substack{\alpha \in S_{2p} \\ \alpha_{p+2} < \cdots < \alpha_{2p}}} \varepsilon(\alpha)\langle T(w_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge w_{\alpha_p}), w_{\alpha_{p+1}} \wedge \cdots \wedge w_{\alpha_{2p}}\rangle .$$

Etant donné $J = (j_2, \cdots, j_p)$ où $j_2 < \cdots < j_p \leq 2p$, désignons par S^J_{p+1} l'ensemble des permutations

$$\alpha\colon (1, \cdots, p+1) \to (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{p+1}, j_2, \cdots, j_p) .$$

Alors

$$\begin{aligned} &\langle \mathrm{Alt}\, T(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p), w_{p+1} \wedge \cdots \wedge w_{2p}\rangle \\ &\quad = \frac{(p-1)!}{(2p)!} \sum_J \Big[\sum_{\alpha \in S^J_{p+1}} \varepsilon(\alpha)\langle T(w_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge w_{\alpha_p}), \\ &\qquad\qquad w_{\alpha_{p+1}} \wedge w_{j_2} \wedge \cdots \wedge w_{j_p}\rangle\Big] . \end{aligned}$$

Mais si $T \in \mathscr{B}$, le terme entre crochets est nul pour chaque J [ligne (3)], donc Alt $T = 0$.

Il faut remarquer cependant que $T \in \mathscr{B}$ n'entraîne ni $T^2 \in \mathscr{B}$ ni Alt $T^2 = 0$.

Théorème 3.3. *Soit M une variété riemannienne et p un entier pair, $p < n$. Si en un point $m \in M$ le tenseur R_p de p-courbure satisfait*

$$R_p = c_p A^p ,$$

$A\colon M_m \to M_m$ étant un o.l.a.-a., alors *la forme différentielle* Alt $R_p{}^2$ *est nulle à m. En particulier la forme est nulle en chaque m où la p-courbure sectionnelle de M est invariante.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $R_p{}^2$ satisfait l'identité de Bianchi.

Mais $R_p{}^2 = (c_p A^p)^2 = c_p{}^2(A \circ A)^p$. Parce que $A \circ A$ est auto-adjoint sur M_m $c_p{}^2(A \circ A)^p$ satisfait l'identité de Bianchi par la proposition 2.2.

D'ailleurs si la p-courbure sectionnelle est identiquement égale à c_p, on a $R_p = c_p I$ et $(R_p)^2 = c_p{}^2 I \in \mathscr{B}$.

4. Les classes de Pontrjagin

L'importance de la forme Alt $(R_p)^2$ vient du théorème annoncé:

Théorème 4.1. *Soit M une variété riemannienne et R_{2k} son tenseur de $2k$-courbure. Alors*

$$\frac{[(2k)!]^2}{(2^k k!)^2 (2\pi)^{2k}} \operatorname{Alt} R_{2k}{}^2$$

est une forme différentielle de M fermée de degré $4k$ qui représente $\mathscr{P}_k(M)$, la k^e-classe de Pontrjagin de M.

Démonstration. Soit $m \in M$ fixe et $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormale de M_m. Désignons par $\tilde{v}$ le relèvement horizontal de $v \in M_m$ au point $(m; e_1, \cdots, e_n) \in F(M)$, $F(M)$ = l'espace fibré principal des repères orthonormals sur M. Si $\pi\colon F(M) \to M$ est la projection on a $\pi_*(\tilde{v}) = v$.

Chern [1] a montré que

$$\pi^*\Theta = \frac{[(2k)!]^2}{(2^k k!)^2(2\pi)^{2k}} \sum_I \Theta_I \wedge \Theta_I ,$$

où Θ est une forme de M fermée de degré $4k$ qui représente la classe $\mathscr{P}_k(M)$ dans $H^{4k}(M; R)$. Ici on somme sur tous ensembles $I = (i_1, \cdots, i_{2k})$ tels que $1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k} \leq n$. Mais la forme horizontale Θ_I est donnée par rapport à R_{2k} par

$$\Theta_I(\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_{2k}) = \langle R_{2k}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2k}), e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}} \rangle .$$

Si $c_k = \dfrac{[(2k)!]^2}{(2^k k!)^2(2\pi)^{2k}}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left[c_k \sum_I \Theta_I \wedge \Theta_I\right](\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_{4k}) \\
&\quad = c_k \sum_I \frac{1}{(4k)!} \sum_{\alpha \in S_{4k}} \varepsilon(\alpha)\Theta_I(\tilde{v}_{\alpha_1}, \cdots, \tilde{v}_{\alpha_{2k}})\Theta_I(\tilde{v}_{\alpha_{2k+1}}, \cdots, \tilde{v}_{\alpha_{4k}}) \\
&\quad = \frac{c_k}{(4k)!} \sum_{\alpha \in S_{4k}} \varepsilon(\alpha) \sum_I \langle R_{2k}(v_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_{2k}}), e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}} \rangle \\
&\qquad\qquad \cdot \langle R_{2k}(v_{\alpha_{2k+1}} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_{4k}}), e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}} \rangle
\end{aligned}$$

$$= \frac{c_k}{(4k)!} \sum_{\alpha \in S_{4k}} \varepsilon(\alpha) \langle R_{2k}(v_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_{2k}}), R_{2k}(v_{\alpha_{2k+1}} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_{4k}}) \rangle$$

$$= \frac{c_k}{(4k)!} \sum_{\alpha \in S_{4k}} \varepsilon(\alpha) \langle R_{2k}{}^2(v_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_{2k}}), v_{\alpha_{2k+1}} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_{4k}} \rangle$$

$$= c_k(\mathrm{Alt}\, R_{2k}{}^2)(v_1, \cdots, v_{4k}) .$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Nous avons immédiatement la nullité de la k^e-classe de Pontrjagin de M sous l'hypothèse de théorème 3.3. En effet les classes $\mathscr{P}_q(M)$ sont nulles pour $q \geq k$.

Lemme 4.2. *Soit $s\colon x \to (x; e_1, \cdots, e_n)$ une section locale de $F(M)$ dans un voisinage U de $m \in M$. Si $\{e^1, \cdots, e^n\}$ sont les formes de degré 1 duelles aux champs de vecteurs $\{e_1, \cdots, e_n\}$, on a*

$$s^*\Theta_I = \sum_{j_1 < \cdots < j_{2k}} \langle R_{2k}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}}), e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{2k}} \rangle \cdot e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{2k}} . \tag{11}$$

Démonstration. Pour $\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_{2k}$ tangents à $F(M)$ en $(m; e_1, \cdots, e_n) \in F(M)$ et $v_i = \pi_*(\tilde{v}_i)$,

$$\begin{aligned}(s^*\Theta_I)(v_1, \cdots, v_{2k}) &= \Theta_I(\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_{2k}) \\ &= \langle R_{2k}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}}), v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2k} \rangle ,\end{aligned}$$

qui réduit à

$$\left(\sum_{j_1 < \cdots < j_{2k}} \langle R_{2k}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}}), e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{2k}} \rangle e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{2k}} \right) \cdot (v_1, \cdots, v_{2k}) .$$

Corollaire 4.3. *Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormale de M_m et $A = [a_{ij}]$ la matrice d'un o.l.a.-a. de M_m relativement à cette base. Alors on a*

$$R_{2k} = c_{2k} A^{2k} ,$$

si et seulement si

$$s^*\Theta = \sum_{j_1 < \cdots < j_{2k}} c_{2k} A_{IJ} e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{2k}} , \tag{12}$$

où $J = (j_1, \cdots, j_{2k})$ et $s\colon U \to F(M)$ est une section dans un voisinage de m telle que $s(m) = (m; e_1, \cdots, e_n)$.

Démonstration. Compte tendu du lemme 4.2, (12) est valide si et seulement si

$$\sum_{j_1<\cdots<j_{2k}} c_{2k}A_{IJ}e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{2k}}$$
$$= \sum_{j_1<\cdots<j_{2k}} \langle R_{2k}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}}), e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{2k}}\rangle e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{2k}} .$$

Puisque $\{e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{2k}} | 1 \leq j_1 < \cdots < j_{2k} \leq n\}$ est une base de $\Lambda^{2k}(M_m)^*$, (12) est valide si et seulement si

$$c_{2k}A_{IJ} = \langle R_{2k}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}}), e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{2k}}\rangle$$

pour tout J. Mais

$$c_{2k}A_{IJ} = \langle c_{2k}A^{2k}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}}), e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{2k}}\rangle .$$

Donc la ligne (12) est valide si et seulement si $R_{2k} = c_{2k}A^{2k}$.

De 2.5 et 4.3 nous avons le

Corollaire 4.4. *Si $2k | n$ = dimension de M et $R_{2k} = cA^{2k}$,*

$$s^*\Theta_{1\ldots n} = (c)^{n/2k}(\det A)\omega ,$$

ω étant la forme du volume de M.

La condition sur Θ_I de l'égalité (12) est la condition 3.3 de Cheung et Hsiung. On peut démontrer que sous cette condition les formes qui représentent les classes $\mathscr{P}_q(M)$ sont nulles pour tous $q \geq k$, d'où le

Théorème 4.5. *Soit M une variété riemannienne compacte et orientable. Si en chaque $m \in M$ ils existent $c \in \boldsymbol{R}$ et A: $M_m \to M_m$ (o.l.a.-a.) tels que*

$$R_{2k} = cA^{2k} \colon \Lambda^{2k}(M_m) \to \Lambda^{2k}(M_m) ,$$

alors les classes de Pontrjagin $\mathscr{P}_q(M)$ sont nulles pour $q \geq k$.

La démonstration, analogue à celle de Thorpe [7] au cas $R_{2k} = cI$, se trouve dans [5].

Bibliographie

[1] S. S. Chern, *On the curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20** (1956) 117–126.
[2] Y. K. Cheung & C. C. Hsiung, *Curvature and characteristic classes of compact Riemannian manifolds,* J. Differential Geometry **1** (1967) 89–97.
[3] A. Gray, *Some relations between curvature and characteristic classes,* Math. Ann. **184** (1970) 257–267.
[4] R. S. Kulkarni, *Curvature structures in differential geometry,* à paraître.
[5] A. K. Stehney, *The Grassmann quadratic p-relations and curvature,* State University of New York at Stony Brook, thèse.
[6] ——, *Extremal sets of p-th sectional curvature,* à paraître.
[7] J. A. Thorpe, *Sectional curvature and characteristic classes,* Ann. of Math. **80** (1965) 429–443.

[8] ——, *Some remarks on the Gauss-Bonnet integral,* J. Math. Mech. **18** (1969) 779–786.

WELLESLEY COLLEGE