

EQUATION DE LIE. II

BERNARD MALGRANGE

6. Équations de Lie: forme finie

Soit $I_k(a) \in Q^k(a, a)$ le jet d'ordre k en a de l'identité, et soit I_k la section de Q^k : $a \mapsto I_k(a)$. Soit $\xi \in \Gamma(X, \tilde{J}^k(T))$; et soit $F_t \in \Gamma(X, \mathcal{Q}^k)$, avec $F_0 = I_k$, $(d/dt)F_t|_{t=0} = \xi$ ($t \in \mathbb{R}$, voisin de 0); on peut aussi considérer $(d/dt)F_t(a)|_{t=0}$ en tant que vecteur de $Q_k(a)$ en $I_k(a)$, et l'on s'assure aisément que ce vecteur ne dépend que de ξ ; d'où un isomorphisme entre $\tilde{J}^k(T)(a)$ et l'espace des vecteurs de $Q^k(a)$ en $I_k(a)$. Désignant par $V(Q^k)$ l'espace des vecteurs verticaux de Q^k pour la projection "source", cela revient à dire qu'on a un isomorphisme $\tilde{J}^k(T)(a) \simeq V(Q^k)(I_k(a))$.

Soit $F \in Q^k(a, b)$; l'application $G \mapsto GF$ est un isomorphisme $Q^k(b) \rightarrow Q^k(a)$; cet isomorphisme fait correspondre à ξ , vecteurs de $Q^k(b)$ en G (= vecteur vertical de Q^k en G) un vecteur de $Q^k(a)$ en GF , que nous noterons ξF ; en particulier, si l'on prend $G = I_k(b)$, on obtient une application $\xi \mapsto \xi F$: $\tilde{J}^k(T)(b) \rightarrow V(Q^k)(F)$. Soit $\xi \in \Gamma(X, \tilde{J}^k(T))$; pour $F \in Q^k$, posons $\xi F = \xi(b)F$, $b = \text{but } F$; l'application $F \rightarrow \xi F$ définit un champ invariant à droite sur Q^k , que nous noterons $\tau^k(\xi)$; il revient au même de construire τ^k ainsi: considérons pour un instant Q^k comme fibré sur X par la projection "but"; si g est un automorphisme de X , associons-lui l'automorphisme de Q^k (qui, pour tout a , est un automorphisme de $Q^k(a)$): $F \rightarrow (\tilde{j}^k g)(b)F$, avec $b = \text{but } F$; en passant aux automorphismes infinitésimaux, on obtient une structure de prolongement d'ordre k sur X de Q^k qui définit précisément τ^k ; en particulier, τ^k est un morphisme d'algèbres de Lie. Soit maintenant R^k une équation de Lie; les $\tilde{R}^k F$, $F \in Q^k$ forment un système de Pfaff complètement intégrable et transverse à I_k , puisque formé de vecteurs verticaux; l'ensemble des sous-variétés intégrables passant par I_k définit donc un germe de sous-variété de Q^k au voisinage de I_k , que nous noterons P^k ; nous désignerons aussi par P^k un représentant du germe précédent, que l'on sera amené à restreindre au besoin pour que les propriétés qui suivent soient vraies.

Il résulte immédiatement du théorème des fonctions implicites que la restriction à P^k de l'application "source", et de l'application "but" sont des submersions; par contre, la restriction à P^k de l'application (source, but) est une submersion si et seulement si R^k est *formellement transitif*, ce qui, par

définition signifie que la projection $\tilde{R}^k \rightarrow T$ est surjective (dans le cas général, on ne peut absolument rien dire; nous n'avons même pas supposé $\tilde{R}^k \rightarrow T$ de rang constant). On démontre, comme dans la théorie des groupes de Lie, que P^k est un germe de sous-groupe de Q^k le long de I_k , c'est-à-dire que si l'on a $F \in P^k$, $G \in P^k$, source $(G) = \text{but}(F)$, et si F et G sont assez voisins de I_k , on a $F^{-1} \in P^k$ et $FG \in P^k$ (nous laissons les détails au lecteur). Comme Q^k, P^k sera muni sauf mention explicite du contraire de la projection "source"; nous noterons alors $\mathcal{P}^k$ le faisceau de ses sections, et $\tilde{\mathcal{P}}^k$ le faisceau de ses sections étales. *Dans la suite nous supposerons $k \geq 1$, le cas $k = 0$ étant trivial par Frobenius.*

On peut considérer P^k comme une équation différentielle (non linéaire) d'ordre k dans les germes d'applications $X \rightarrow X$; nous allons donc utiliser dans ce cas particulier la théorie formelle des équations différentielles non-linéaires, en prenant pour référence [10]. *Dans toute la suite de cet article, nous supposerons que R^k est une équation de Lie formellement intégrable.*

Commençons par rappeler une proposition connue (cf. [21]). Pour $F \in Q^{(1,k)}$ et $\xi \in I(X, \tilde{J}^{(1,k)}(T))$, on peut définir ξF , vecteur vertical de $Q^{(1,k)}$ en F de la même manière que nous avons défini τ^k ci-dessus; désignons par $J^1(P^k)$ (resp. $\tilde{J}^1(P^k) \subset Q^{(1,k)}$) l'ensemble des jets d'ordre 1 de sections (resp. de sections étales) de P^k ; il est facile de voir que, au voisinage de $\tilde{J}^1 I_k = \tilde{\lambda}^1 I_{k+1}$, $\tilde{J}^1(P^k)$ peut être construit au moyen du système de Pfaff $F \rightarrow \tilde{J}^1(\tilde{R}^k)F$ de la même manière que P^k a été construit au moyen de $\tilde{R}^k$; d'autre part, du fait que $\tilde{\lambda}^1: Q^{k+1} \rightarrow Q^{(1,k)}$ est un homomorphisme de groupoïdes, résulte que $\tilde{\lambda}^1$ commute à l'opération $(\xi, F) \rightarrow \xi F$; ces faits, joints à l'égalité $\tilde{R}^{k+1} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1} \tilde{J}^1(\tilde{R}^k)$ entraînent, au voisinage de I_{k+1} , la relation $P^{k+1} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1} \tilde{J}^1(P^k)$.

D'autre part, Q^{k+1} s'identifie naturellement au prolongement d'ordre 1 de Q^k (puisque $k \geq 1$, un jet d'ordre $k+1$ d'application $X \rightarrow X$ dont la projection d'ordre k est inversible, est lui-même inversible); par la même argument, on a aussi $\tilde{J}^1(P^k) \cap \tilde{\lambda}^1(Q^{k+1}) = J^1(P^k) \cap \tilde{\lambda}^1(Q^{k+1})$. Par conséquent, $(P^k)^{(1)} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1} \tilde{J}^1(P^k)$ est le prolongement d'ordre 1 de P^k , et l'on a le résultat suivant:

Proposition (6.1). *Au voisinage de I_{k+1} , on a $P^{k+1} = (P^k)^{(1)}$; en particulier la projection $(P^k)^{(1)} \rightarrow P^k$ est surjective.*

Le dernier point résulte du théorème des fonctions implicites, et de l'hypothèse " R^{k+1} est un fibré, et $\pi_k: R^{k+1} \rightarrow R^k$ est surjectif".

Dans la suite, nous noterons $(\mathcal{P}^k)^{(1)}$ [resp. $(\tilde{\mathcal{P}}^k)^{(1)}$] le faisceau des sections (resp. des sections étales) de $(P^k)^{(1)}$, considéré comme sous-fibré de Q^{k+1} .

La fin de ce paragraphe sera consacrée à l'étude du complexe de Spencer de P^k . Pour cela nous aurons besoin de reprendre les considérations qui conduisent d'habitude à la définition de la "forme fondamentale sur les espaces de repères" (cf. notamment [2], [15]), et de donner leur lien avec le formalisme développé au § 3.

Soit G une section de $\tilde{\mathcal{Q}}^k$; pour $a \in X$, l'application $F \rightarrow G(b)F$ ($F \in Q^k(a)$, but $F = b$) est un automorphisme de $Q^k(a)$; cet automorphisme transforme

$\xi \in V(Q^k)(F)$ en un vecteur de $V(Q^k)(G(b)F)$ que nous noterons $G\xi$; en particulier, prenant $F = I_k(a)$, l'application $\xi \rightarrow G\xi$ est une bijection $\tilde{J}^k(T)(a) = V(Q^k)(I_k(a)) \rightarrow V(Q^k)(G(a))$. On vérifie que l'action à gauche des automorphismes diagonaux définie ici sur $V(Q^k)$ commute à l'action à droite définie au début de ce paragraphe; alors la bijection $\tilde{J}^k(T)(a) \rightarrow \tilde{J}^k(T)(b)$ définie par $\xi \mapsto G\xi G(a)^{-1}$ (que nous écrirons aussi $\xi \mapsto G\xi G^{-1}$) provient de l'action naturelle des automorphismes diagonaux sur les champs diagonaux: pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, si F_t est une famille à un paramètre de sections de $\mathcal{D}^k$, avec $F_0 = I_k$, $(d/dt)F_t|_{t=0}(a) = \xi$, on a $(d/dt)GF_tG^{-1}|_{t=0}(a) = G\xi G^{-1}$. Nous poserons $G\xi G^{-1} = G(\xi)$, ou quelquefois $G[\xi]$ pour éviter les confusions.

On vérifie aisément que $G(\xi)$ ne dépend que de ξ et du jet d'ordre 1 de G en a ; d'où une application

$$\mathcal{Q}^{(1,k)} \times_X \tilde{J}^k(T) \rightarrow V(Q^k)$$

que nous noterons encore $(H, \xi) \rightarrow H(\xi)$.

Prenons maintenant $H_1 \in Q^{k+1}(a)$, et posons $H = \pi_k H_1 \in Q^k(a)$, $b = \text{but } H$; nous allons calculer $(\lambda^1 H_1)\xi$, pour $\xi \in \tilde{J}^k(T)(a)$; pour cela prenons un germe $f \in \text{Aut}(X)_a$, avec $\tilde{f}^{k+1}f(a) = H_1$; par définition de λ^1 , on a $\tilde{f}^1 \tilde{f}^k f(a) = \lambda^1 H_1$, d'où, par définition de $(\lambda^1 H_1)\xi$: $(\lambda^1 H_1)\xi = (\tilde{f}^k f)\xi$; par suite, on a $(\lambda_1 H_1)\xi H^{-1} = (\tilde{f}^k f)\xi(\tilde{f}^k f)^{-1} = (\tilde{f}^k f)(\xi)$, l'action naturelle de $\tilde{f}^k f$ sur ξ ; mais $\tilde{f}^k f$ est la partie principale d'ordre k de l'application diagonale F définie par $y' = f(x')$, $y = f(x)$; comme F préserve la structure de produit de X^2 , donc commute à ν , on a aussi $(\tilde{f}^k f)(\xi) = F(\xi) = \nu^{-1}F(\nu\xi) = \nu^{-1}(\tilde{f}^{k+1}f)(\nu\xi)$, cette dernière égalité résultant du fait (déjà noté au § 5) que l'action d'une transformation diagonale sur $J^k(T)$ ne dépend que de sa partie principale d'ordre $k+1$; or cette dernière action s'effectue fibre par fibre sur les deux facteurs, comme on le vérifie immédiatement. Finalement, on trouve la formule suivante:

$$(6.2) \quad (\lambda_1 H_1)\xi H^{-1} = \nu^{-1}H_1(\nu\xi) .$$

On en déduit la proposition suivante:

Proposition (6.3). Soit $F_1 \in \mathcal{D}_a^{k+1}$, avec $\pi_k F_1 = F$, et soit $\xi \in \tilde{J}^k(T)(a)$; on a $F^{-1}(\tilde{\lambda}^1 F_1)\xi = \xi - (\nu\xi) \frown \mathcal{D}F_1$.

En effet, on a $F^{-1}(\tilde{\lambda}^1 F_1)\xi = F^{-1}(\tilde{\lambda}^1 F_1)\xi F^{-1}F = F^{-1}\nu^{-1}F_1(\nu\xi)F$ par (6.2), et le dernier terme est encore égal à $F^{-1}[\nu^{-1}F_1(\nu\xi)]$; la formule résulte alors immédiatement de (5.8).

Du fait que $\nu^{-1} - i'(\mathcal{D}F)$ et $\nu + i'(\mathcal{D}F)$ sont inverses l'un de l'autre, on déduit de proposition (6.3) qu'on a aussi

$$(6.4) \quad (\tilde{\lambda}^1 F_1)^{-1}F\xi = \xi + \nu(\xi \frown \mathcal{D}F_1) = \xi + \xi \frown \mathcal{D}'F_1 ,$$

où $\mathcal{D}'$ est défini par la remarque (5.13).

A noter que, dans la proposition (6.3) et (6.4), on aurait pu aussi bien écrire dans le terme de gauche $\tilde{J}^1 F$ au lieu de F ; à noter aussi que, pour a fixé, $Q^{k+1}(a)$ est "l'espace des repères d'ordre $k+1$ de source a " et que l'application qui à $\xi \in V(Q^{k+1})(F)$, $F \in Q^{k+1}(a)$ fait correspondre $\nu(\lambda^1 F)^{-1} \pi_k \xi$ définit sur $Q^{k+1}(a)$ une forme à valeurs dans $J^k(T)(a)$, qui est précisément la forme fondamentale de Cartan sur $Q^{k+1}(a)$.

Les formules précédentes peuvent s'écrire un peu autrement. Soit $J^1(Q^k)$ l'espace des jets d'ordre 1 de sections de Q^k ; on a une injection canonique $Q^{(1,k)} \rightarrow J^1(Q^k)$ l'image étant formée des éléments inversibles de $J^1(Q^k)$; soit $J_0^1(Q^k)$ le sous-ensemble des $F \in J^1(Q^k)$ qui se projettent dans Q^k sur I_k , et posons encore $Q_0^{(1,k)} = J_0^1(Q^k) \cap Q^{(1,k)}$; on sait (cf. [10]) que $J^1(Q^k)$ est un fibré affine sur Q^k , de fibré vectoriel associé $T^* \otimes V(Q^k)$; par un point $F \in J_0^1(Q^k)$ passe une section canonique, à savoir $\tilde{J}^1 I_k$, d'où un isomorphisme

$$\partial: J_0^1(Q^k) \simeq T^* \otimes \tilde{J}^k(T) .$$

Proposition (6.5). *Pour $F \in Q_0^{(1,k)}(a)$ et $\xi \in \tilde{J}^k(T)(a)$, on a $F\xi = \xi + \xi \wedge \partial F$.*

Prenons G , section de $\mathcal{Q}^k$ au voisinage de a , avec $\tilde{J}^1 G(a) = F$; en coordonnées locales, G est défini par $y' = g(x, x')$, $y = g(x, x)$, modulo $(x' - x)^{k+1}$; on a $G(a) = I_k(a)$, donc $g(a, x') = x'$ modulo $(x' - a)^{k+1}$; à l'ordre 1 au voisinage de a , i.e., modulo $(x - a)^2, (x' - x)^{k+1}$, on peut alors écrire $g(x, x') = x' + \sum (x_i - a_i) h_i(a, x')$, les a_i étant définis modulo $(x' - a)^{k+1}$; on vérifie alors facilement, en développant g suivant les $(x' - x)^a$, puis les coefficients $g_a(x)$ suivant les puissances de $(x - a)$ que l'on a

$$(6.6) \quad (\text{id} \otimes \nu) \partial G = \sum dx_i \otimes h_i(a, x') \frac{\partial}{\partial x'} = dx \otimes \frac{\partial g}{\partial x}(a, x') \frac{\partial}{\partial x'} .$$

Soit alors H_t une famille à un paramètre de sections de $\mathcal{Q}^k$, avec $H_0 = I_k$, $(d/dt)H_t|_{t=0}(a) = \xi$; en coordonnées locales, H_t est défini par $y' = h_t(x, x')$, $y = h_t(x, x) = h_t^0(x)$, avec $h_0(x, x') = x'$, et

$$\xi = \left(\frac{dh_0^0}{dt}(a), \frac{dh_0}{dt}(a, x') \right) .$$

Alors $G \circ H_t$ est défini par

$$y'_t = g(h_t^0(x), h_t(x, x')) , \quad y_t = g(h_t^0(x), h_t^0(x))$$

et l'on a

$$\nu(G\xi) = \frac{dy'_t}{dt} \Big|_{t=0, x=a} = \frac{dh_0^0}{dt}(a) \frac{\partial g}{\partial x}(a, x') + \frac{dh_0}{dt}(a, x') \frac{\partial g}{\partial x'}(a, x')$$

comme $(\partial g / \partial x')(a, x') = \text{identité}$, le second terme vaut $(dh_0/dt)(a, x') = \nu\xi$; et,

d'après les formules donnant ∂G et ξ , le premier vaut $\nu(\xi \wedge \partial G)$; d'où le résultat.

Corollaire (6.7). Soit $F_1 \in \mathcal{D}^{k+1}$, et posons $\pi_k F_1 = F$; on a

$$\partial[(\tilde{J}^1 F)^{-1}(\tilde{\lambda}^1 F_1)] = -(\nu^* \otimes \text{id})\bar{\mathcal{D}}F_1 (= \mathcal{D}'F_1).$$

Cela résulte immédiatement de la proposition (6.3) et de la proposition (6.5): on déduit aussi de (6.4) et de la proposition (6.5) qu'on a, sous les mêmes hypothèses

$$(6.8) \quad \partial[(\lambda^1 F_1)^{-1}(\tilde{J}^1 F)^{-1}] = (\text{id} \otimes \nu^{-1})\mathcal{D}F_1$$

(cf. [21], où cette dernière formule est prise comme définition de $\mathcal{D}F_1$).

A noter que ces formules peuvent facilement se vérifier en coordonnées locales en utilisant (5.3), (5.10) et l'expression de ∂ , qu'on obtient en remplaçant dans (6.6) (a, x, x') par (x, x', x'') . A noter aussi qu'elles sont l'analogue "non linéaire" de la formule (4.5).

Proposition (6.9). Soit $F \in \mathcal{D}^{k+1}$, avec $\pi_k F \in \mathcal{P}^k$; les propriétés suivantes sont équivalentes:

- i) $F \in (\mathcal{P}^k)^{(1)}$; ii) $\mathcal{D}F \in \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{P}^k$; iii) $\bar{\mathcal{D}}F \in J^0(\mathcal{T})^* \otimes \bar{\mathcal{P}}^k$.

En effet, $J^1(P^k)$ est un sous-fibré affine de $J^1(Q^k)$ (restreint à P^k), de fibré vectoriel associé $V(P^k)$; par suite, on a $\partial J_0^1(P^k) = T^* \otimes \tilde{R}^k$. Alors, la formule (6.7) montre que iii) équivaut à $\tilde{\lambda}^1 F \in J^1(\mathcal{P}^k)$, donc a i). L'équivalence i) $\Leftrightarrow$ ii) s'établit de même, en utilisant (6.8). On peut aussi démontrer directement l'équivalence ii) $\Leftrightarrow$ iii) en utilisant le fait que $\nu + i'(\mathcal{D}F)$ et $\nu^{-1} - i'(\bar{\mathcal{D}}F)$ sont inverses l'un de l'autre, et la remarque élémentaire suivante: soient E un espace vectoriel, F un sous-espace de E , u une application linéaire $E \rightarrow E$, avec $u(E) \subset F$, $I + u$ inversible, alors, si l'on pose $(I + u)^{-1} = I - \tilde{u}$, on a encore $\tilde{u}(E) \subset F$.

De la proposition précédente résulte que le complexe (5.12) donne par restriction un complexe

$$(6.10) \quad (\text{Sol}) \xrightarrow{\tilde{J}^{k+1}} (\mathcal{P}^k)^{(1)} \xrightarrow{\bar{\mathcal{D}}} J^0(\mathcal{T}) \otimes \bar{\mathcal{P}}^k \xrightarrow{\bar{\mathcal{D}}_1} \Lambda^2 J_0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^{k-1}(\mathcal{T})$$

où (Sol) désigne la faisceau des $f \in \text{Aut}(X)$ vérifiant $\tilde{J}^k f \in \mathcal{P}^k$ (c'est un germe au voisinage de I_k , dans la topologie fine $\mathcal{C}^k$, de sous-groupeoïde de $\text{Aut}(X)$, que l'on désigne souvent sous le nom de "pseudogroupe de Lie"). Ce complexe est exact en $(\mathcal{P}^k)^{(1)}$; par ailleurs, si R^k est contenu dans le prolongement d'ordre 1 d'une équation de Lie R^{k-1} , on peut remplacer le dernier terme par $\Lambda^2 J_0(\mathcal{T})^* \otimes \bar{\mathcal{P}}^{k-1}$. De même, le complexe (5.5) donne par restriction un complexe analogue, que nous n'écrivons pas.

Remarque (6.11). Les considérations qui conduisent à la proposition (6.3) se "restreignent" à P^k ; en particulier, si $F \in \mathcal{P}^k$, on aura $F(\bar{\mathcal{P}}^k) = \bar{\mathcal{P}}^k$; si

$F \in (\mathcal{P}^k)^{(1)}$, on aura $F(\mathcal{R}^k) = \mathcal{R}^k$ (cette dernière égalité ayant aussi un sens “fibre par fibre”); nous laissons les détails au lecteur.

Passons à l'étude du “complexe de δ -cohomologie” de P^k ; soit γ^k le noyau de $\pi_{k-1}: J^k(T) \rightarrow J^{k-1}(T)$; à noter qu'on a un isomorphisme $\gamma^k \simeq S^k J^0(T)^* \otimes J^0(T)$ commutant aux automorphismes diagonaux de X^2 . Soit d'autre part $v(Q^k)$ le sous-espace des vecteurs de $V(Q^k)$ dont la projection dans $V(Q^{k-1})$ est nulle; soit $F \in Q^k$, de source a et de but b , avec $k \geq 1$; la théorie formelle des équations différentielles (cf. [10]) donne un complexe

$$(6.12)_k \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & v(Q^k)(F) & \xrightarrow{\delta} & T^*(a) \otimes v(Q^{k-1})(F) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & & & & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^n T^*(a) \otimes v(Q^{k-n}) & \longrightarrow 0. \end{array}$$

D'autre part, la théorie des équations linéaires (cf. § 1) donne un complexe

$$(6.13)_k \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \gamma^k(a) & \xrightarrow{\delta} & T^*(a) \otimes \gamma^{k-1}(a) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & & & & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^n T^*(a) \otimes \gamma^{k-n} & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Le passage de l'un de ces complexes à l'autre peut s'effectuer ainsi: prenons $f \in \text{Aut}(X)_a$, avec $\tilde{f}^k f(a) = F$; alors l'application $\xi \rightarrow (\tilde{f}^k f)\xi$, $\xi \mapsto \nu^{-1}\xi$ envoie bijectivement $J^k(T)(a)$ sur $V(Q^k)(F)$; il est visible que la restriction de cette application à γ^k ne dépend que de F et même de $\pi_1 F$; on opère de même pour γ^l , $l < k$; on obtient ainsi un diagramme $(6.12)_k \rightarrow (6.13)_k$.

Lemme (6.14). *Ce diagramme est commutatif.*

Tout d'abord, pour $F = I_k(a)$, la démonstration se fait immédiatement, par exemple en coordonnées, et peut être laissée au lecteur. Pour passer de là au cas général, notons pour un instant E le fibré $X^2 \rightarrow X$ défini par la projection $(x, z) \rightarrow x$, et considérons le germe d'automorphisme fibré $(x, z) \rightarrow (x, f^{-1}(z))$ de E au voisinage de (a, b) , $b = \text{but } F$; il définit un germe d'automorphisme de $J^l(E)$, donc de $V(J^l(E))$ ($0 \leq l \leq k$) au-dessus de X ; en particulier on obtient un isomorphisme $V(J^l(E))(F) \simeq V(J^l(E))I_l(a)$ ou encore, dans nos notations $V(Q^l)(F) \simeq V(Q^l)(I_l(a)) \simeq \tilde{J}^l(T)(a)$, dont on vérifie (par exemple en exprimant les vecteurs à partir de familles à un paramètre) qu'il coïncide avec l'inverse de l'application $\xi \mapsto (\tilde{f}^k f)\xi$ considérée ci-dessus; il suffit alors d'appliquer un lemme de Goldschmidt [10] qui assure que le complexe $(6.12)_k$ commute aux automorphismes fibrés de E .

Remarquons que, pour $1 \leq l \leq k$, on a $\gamma^l \subset J_0^l(T)$, donc ν^{-1} induit l'identité sur γ^l ; on peut alors définir l'application $\gamma^l(a) \rightarrow v(Q^l)(F)$ par $\xi \mapsto G\xi$, avec $G \in \mathcal{Q}^k(a)$, $G(a) = F$ (en effet, $G\xi$ ne dépend que de $G(a)$ si $\xi \in J_0^k(T)(a)$, puisqu'alors ξ est un vecteur de $Q^k(a, a)$ en $I_k(a)$). Par contre, cela serait faux pour $l = 0$ (cf. formules (6.2) et suivantes).

Posons maintenant $g^k = \gamma^k \cap R^k$, $v(P^k) = V(P^k) \cap v(Q^k)$.

Lemme (6.15). Soit $F \in P^k$, de source a ; l'isomorphisme précédent $\gamma^k(a) \simeq v(Q^k)(F)$ donne par restriction un isomorphisme $g^k(a) \simeq v(P^k)(F)$.

On a $k \geq 1$, donc la remarque précédente s'applique; soit alors $G \in \tilde{\mathcal{P}}_a^k$, avec $G(a) = F$; on a $G\tilde{R}^k(a) = V(P^k)(F)$, d'où par restriction $Gg^k(a) = v(P^k)(F)$, ce qui démontre le lemme.

Théorème (6.16). Supposons g^k 2-acyclique. Alors P^k est formellement intégrable.

En effet, il résulte des lemmes précédents que $v(P^k)$ est 2-acyclique, et que $v(P^k)^{(1)} = \text{Ker} \{T^* \otimes v(P^k) \rightarrow \Lambda^2 T^* \otimes v(Q^{k-1})\}$ est de rang constant puisqu' il est isomorphe à $g^{k+1} \times_x P^k$, avec $g^{k+1} = \text{Ker} \{\pi_k: R^{k+1} \rightarrow R^k\}$.

D'autre part, on a vu que $(P^k)^{(1)} \rightarrow P^k$ est surjectif, donc $(P^k)^{(1)}$ est un fibré affine sur P^k , de fibré vectoriel associé $v(P^k)^{(1)}$. Le théorème résulte alors de Goldschmidt [10].

Remarque (6.17). Puisque R^k est supposé formellement intégrable, il existe un prolongement R^l ($l \geq k$) qui soit 2-acyclique, ou même involutif (i.e., n -acyclique; cf. [22], [9]). Quitte à restreindre P^k une fois de plus, on déduit alors de la proposition (6.1) et du lemme (6.15) que P^l est formellement intégrable, et $P^l \rightarrow P^k$ surjectif. D'où l'existence de solutions formelles (et, dans le cas analytique, de solutions) de l'équation P^k dont le jet d'ordre k soit n'importe quel élément donné de P^k .

7. Le complexe de Spencer "sophistiqué"

Rappelons d'abord la version "sophistiquée" du complexe de Spencer ([24] ou [25]; voir aussi [22] et [9] pour le cas linéaire). Soit $\bar{\delta}$ la restriction de $-\bar{D}$ à $\Lambda J^0(\mathcal{T})^* \otimes \underline{\gamma}^k$ ($k \geq 1$), et posons

$$B^{k,p} = \Lambda^p J^0(T)^* \otimes \tilde{J}^k(T) / \bar{\delta}(\Lambda^{p-1} J^0(T)^* \otimes \gamma^{k+1}) ; \quad B^k = \bigoplus B^{k,p} .$$

A noter que (toujours pour $k \geq 1$), $\mathcal{B}^k$ (le faisceau des sections de B^k) est un faisceau d'algèbres de Lie graduées pour le crochet quotient de celui défini au § 3 sur $\Lambda J^0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^k(\mathcal{T})$: cela résulte immédiatement de (3.12) et du fait que, pour $k \geq 2$, $\Lambda J^0(\mathcal{T})^* \otimes \gamma^k$ est un idéal de $\Lambda J^0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^k(\mathcal{T})$ (par contre, pour $k = 1$, cette dernière propriété n'est plus vraie car $\theta(\gamma^1)$ n'opère pas trivialement sur $J^0(\mathcal{T})^*$; seul subsiste le fait que $\underline{\gamma}^1$ est un idéal de $\tilde{J}^1(\mathcal{T})$). On a alors un complexe

$$(7.1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\tilde{j}^k} \mathcal{B}^{k,0} \xrightarrow{\hat{D}} \mathcal{B}^{k,1} \xrightarrow{\hat{D}} \dots \xrightarrow{\hat{D}} \mathcal{B}^{k,n} \longrightarrow 0$$

obtenu de la manière suivante; soit $u \in \mathcal{B}^{k,p}$, on relève u en $u' \in \Lambda^p J^0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^{k+1}(\mathcal{T})$, et on prend pour $\hat{D}u$ la classe de $\bar{D}u'$ dans $\mathcal{B}^{k,p+1}$ (il est immédiat qu'elle ne dépend que de u); il est connu que ce complexe est acyclique; par passage au quotient, on voit que la formule (3.12) sera encore vraie ici, avec $\bar{D}$ remplacé par $\hat{D}$, le crochet étant celui de $\mathcal{B}^k$.

La version “non-linéaire” de (7.1) s’obtient ainsi : toujours pour $k \geq 1$, soit $Q_k^{k+1}(a)$ l’ensemble des $G \in Q^{k+1}(a)$, avec $\pi_k G = I_k(a)$; on sait que Q^{k+1} est un fibré affine sur Q^k , la fibre du fibré vectoriel associé étant $v(Q^k)$; en $I_k(a)$, ce fibré a un élément canonique, i.e., $I_{k+1}(a)$, d’où un isomorphisme $\partial: Q_k^{k+1}(a) \simeq \gamma^{k+1}(a)$, qui s’interprète d’ailleurs aussi comme un isomorphisme du groupe $Q_k^{k+1}(a)$ sur son algèbre de Lie. On vérifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$(7.2) \quad \begin{array}{ccc} Q_k^{k+1} & \xrightarrow{\lambda^1} & Q_0^{(1,k)} \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ \gamma^{k+1} & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes \gamma^k \end{array}$$

De là et du corollaire (6.7) on déduit ceci

$$(7.3) \quad \text{Si } G \in \mathcal{Q}_k^{k+1}, \text{ on a } \bar{D}G = -\bar{\delta}g, \text{ avec } g = \partial G.$$

Soit maintenant $F \in \mathcal{Q}^k$; relevons F en $F_1 \in \mathcal{Q}^{k+1}$, et soit $\hat{\mathcal{D}}F$ la classe de $\bar{\mathcal{D}}F_1$ dans $\mathcal{B}^{k,1}$; cette classe ne dépend que de F : soit en effet F_2 un autre relèvement de F ; on a $F_2 = F_1 G$, $G \in \mathcal{Q}_k^{k+1}$, d’où, par (5.6) et (7.3),

$$\bar{\mathcal{D}}F_2 = \bar{\mathcal{D}}G + G^{-1}(\bar{\mathcal{D}}F_1) = -\bar{\delta}g + G^{-1}(\bar{\mathcal{D}}F_1)$$

et, comme G^{-1} opère trivialement sur $J^0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^k(\mathcal{T})$, on trouve finalement $\bar{\mathcal{D}}F_2 = -\bar{\delta}g + \bar{\mathcal{D}}F_1$.

Pour $u \in \mathcal{B}^{k,1}$, posons maintenant $\hat{\mathcal{D}}_1 u = \hat{D}u - \frac{1}{2}[u, u]$; on obtient ainsi un complexe, exact en $\mathcal{Q}^k$:

$$(7.4) \quad \text{Aut}(X) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \mathcal{Q}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \mathcal{B}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \mathcal{B}^{k,2},$$

qui est la “version sophistiquée” de (5.12).

Notons que, si nous avions voulu partir de (5.5) au lieu de (5.12), nous aurions eu des difficultés; notamment, on aurait trouvé un quotient de $T^* \otimes J^k(T)$ par un groupe affine, et non plus par un sous-espace vectoriel, et la version “sophistiquée” de $\mathcal{D}_1$ serait alors peu maniable; ceci est notre raison majeure de travailler avec (4.12) plutôt que (4.5).

Comme $\hat{\mathcal{D}}$ est un opérateur différentiel d’ordre 1, il définit un morphisme de fibrés $p^1(\hat{\mathcal{D}}): Q^{(1,k)} \rightarrow B^{k,1}$, que la formule (6.7) permet facilement d’interpréter: soient $F' \in Q^{(1,k)}$, $F = \pi_0 F' \in Q^k$ et F_1 un relèvement de F à Q^{k+1} ; alors $p_1(\hat{\mathcal{D}})F'$ est la classe dans $B^{k,1}$ de $-(\nu^{*-1} \otimes \text{id})\partial(F'^{-1}\lambda^1 F_1)$, classe indépendante de F_1 comme on vient de le voir; on en déduit que la relation $p_1(\hat{\mathcal{D}})F' = 0$ équivaut à $F' \in \lambda^1 Q^{k+1}$.

Soit $\hat{B}^{k,1}$ l’ensemble des $u \in B^{k,1}$ dont la projection $\pi_0 u$ dans $J_0(T)^* \otimes T$ soit telle que l’application $\nu^{-1} - i'(\pi_0 u): J_0(T) \rightarrow T$ soit inversible; l’image de

$Q^{(1,k)}$ -et même l'image de $Q_0^{(1,k)}$ -dans $B^{k,1}$ par $p^1(\hat{\mathcal{Q}})$ est égale à $\hat{B}^{k,1}$ (parce que $\partial Q_0^{(1,k)}$ est l'ensemble des $u \in T^* \otimes \tilde{J}^k(T)$ tels que l'application $\text{id} + i'(\pi_0 u) : T \rightarrow T$ soit inversible; ce dernier fait résulte de (6.6)). En résumé:

Proposition (7.5). *Pour $k \geq 1$, la suite*

$$I_{k+1} \longrightarrow Q^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} Q^{(1,k)} \xrightarrow{p_1(\hat{\mathcal{Q}})} \hat{B}^{k,1} \longrightarrow 0$$

est exacte, au sens suivant: λ^1 est injectif, $p_1(\hat{\mathcal{Q}})$ surjectif, et l'on a $\text{Im}(\lambda^1) = \text{Ker } p^1(\hat{\mathcal{Q}})$. Dans le même sens, la suite

$$I_{k+1} \longrightarrow Q_k^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} Q_0^{(1,k)} \xrightarrow{p_1(\hat{\mathcal{Q}})} \hat{B}^{k,1} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Proposition (7.6). *Pour $k \geq 1$, la suite $\mathcal{Q}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{Q}}} \hat{\mathcal{B}}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{G}}_1} \mathcal{B}^{k,2}$ est exacte.*

Considérons, pour tout $k \geq 0$, l'assertion suivante:

(7.7)_k Soit $u \in J^0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^k(\mathcal{T})$, avec $\nu^{-1} - i'(\pi_0 u) : J^0(T) \rightarrow T$ inversible, et $Du - \frac{1}{2}\pi_{k-1}[u, u] = 0$; alors il existe $F \in \mathcal{Q}^{k+1}$ tel qu'on ait $\mathcal{D}F = u$.

On a d'abord (7.7)_{k+1} $\Rightarrow$ (7.6)_k puisque si $u \in \hat{\mathcal{B}}^{k,1}$ vérifie $\hat{\mathcal{G}}_1 u = 0$, on pourra relever u en $u' \in J^0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^{k+1}(\mathcal{T})$ vérifiant $\mathcal{D}_1 u' = 0$. Démontrons (7.7)_k par récurrence sur k . Pour $k = 0$, cela résulte des faits suivants:

i) L'application $\partial : Q_0^1 \rightarrow T^* \otimes T$ est un isomorphisme de Q_0^1 sur le sous-ensemble des $u \in T^* \otimes T \simeq \text{End}(T)$ tels que $\text{id} + u$ soit inversible.

ii) Pour $F \in \mathcal{Q}_0^1$, on a $\mathcal{D}F = -(\nu^{*-1} \otimes \text{id})\partial F$.

Si u vérifie l'hypothèse de (7.7)₀, on pourra même choisir $F \in \mathcal{Q}_0^1$ tel qu'on ait $\mathcal{D}F = u$.

Supposons maintenant (7.7)_k démontré, et démontrons (7.7)_{k+1}; soit u comme dans l'énoncé, avec k remplacé par $k + 1$, et soit $u' = \pi_k u$; prenons $F \in \mathcal{Q}^{k+1}$, avec $\mathcal{D}F' = u'$, et relevons F' en $F_1 \in \mathcal{Q}^{k+2}$; cherchons $F = F_1 G$, $G \in \mathcal{Q}_{k+1}^{k+2}$, tel qu'on ait $\mathcal{D}F = u$; il revient au même de résoudre $\mathcal{D}G = u - \mathcal{D}F_1$ (cf. le calcul qui suit (7.3)), ou encore $-\bar{\delta}g = u - \mathcal{D}F_1$. Posons $v = u - \mathcal{D}F_1$; on a $\pi_k v = 0$, donc $v \in J^0(T)^* \otimes \tilde{J}^{k+1}$; de plus, on vérifie facilement qu'on a encore $\bar{D}v - \frac{1}{2}\pi_k[v, v] = 0$, ce qui s'écrit encore $\bar{\delta}v = 0$ (puisque $\pi_k[v, v] = 0$); le résultat est alors conséquence de l'exactitude de (1.3).

Remarque (7.8). Le raisonnement précédent montre qu'on peut en fait remplacer $\mathcal{Q}^k$ dans (7.7) par $\{F \in \mathcal{Q}^k \mid \pi_0 F = I_0\} = \tilde{\mathcal{Q}}_0^k$; d'autre part, l'application $\tilde{\mathcal{Q}}_0^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{Q}}} \hat{\mathcal{B}}^{k,1}$ est injective, puisque, pour F et $G \in \tilde{\mathcal{Q}}^k$, l'égalité $\mathcal{D}F = \mathcal{D}G$ (ou $\hat{\mathcal{G}}F = \hat{\mathcal{G}}G$) équivaut à $FG^{-1} \in \tilde{J}^k \text{Aut}(X)$; il en résulte que la suite des sections

$$\Gamma(X, \tilde{\mathcal{Q}}_0^k) \xrightarrow{\hat{\mathcal{Q}}} \Gamma(X, \hat{\mathcal{B}}^{k,1}) \xrightarrow{\hat{\mathcal{G}}_1} \Gamma(X, \mathcal{B}^{k,2})$$

est exacte, et de même avec le premier terme remplacée par $\Gamma(X, \tilde{\mathcal{Q}}^k)$.

Soit maintenant R^k une équation de Lie formellement intégrable (avec

$k \geq 1$); soit $C^{k,p}$ l'image de $J^0(T)^* \otimes \tilde{R}^k$ dans $B^{k,p}$, et posons $\hat{C}^{k,1} = C^{k,1} \cap \hat{B}^{k,1}$; on a $C^{k,1} = J^0(T)^* \otimes \tilde{R}^k / \bar{\delta} g^{k+1}$; comme g^{k+1} est de rang constant, $C^{k,1}$ est aussi de rang constant; de la surjectivité de $R^{k+1} \rightarrow R^k$, on déduit alors que $\hat{D}: \mathcal{B}^{k,0} \rightarrow \mathcal{B}^{k,1}$ envoie $\tilde{\mathcal{P}}^k$ dans $\mathcal{C}^{k,1}$; de même, la surjectivité de $(P^k)^{(1)} \rightarrow P^k$ et (6.10) montrent que (7.4) donne par restriction un complexe

$$(7.9) \quad (\text{Sol}) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \tilde{\mathcal{P}}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \hat{\mathcal{C}}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \mathcal{B}^{k,2}$$

et que ce complexe est exact en $\tilde{\mathcal{P}}^k$. La proposition (7.5) donne alors par restriction le résultat suivant:

Proposition (7.10). *Les suites*

$$\begin{aligned} I_{k+1} &\longrightarrow (P^k)^{(1)} \xrightarrow{\lambda^1} \tilde{J}^1(P^k) \xrightarrow{p_1(\hat{\mathcal{D}})} \hat{C}^{k,1} \longrightarrow 0 \\ I_{k+1} &\longrightarrow (P^k)^{(1)} \cap Q_{k+1}^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} \tilde{J}_0^1(P^k) \xrightarrow{p_1(\hat{\mathcal{D}})} \hat{C}^{k,1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

sont exactes (on pose $\tilde{J}_0^1(P^k) = \tilde{J}^1(P^k) \cap Q_0^{(1,k)}$).

(Pour l'analogie dans le cas linéaire, voir [9].)

Remarque (7.11). *Supposons g^k 2-acyclique; on aura alors*

$$C^{k,2} = \Lambda^2 J^0(T)^* \otimes \tilde{R}^k / \bar{\delta}(J^0(T)^* \otimes g^{k+1})$$

et l'on vérifie facilement que $C^{k,2}$ est de rang constant. De la surjectivité $R^{k+1} \rightarrow R^k$, on déduit alors qu'on a $\hat{D}\mathcal{C}^{k,1} \subset \mathcal{C}^{k,2}$, d'où $\hat{\mathcal{D}}_1\mathcal{C}^{k,1} \subset \mathcal{C}^{k,2}$, et le complexe (7.9) peut s'écrire

$$(7.12) \quad (\text{Sol}) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \tilde{\mathcal{P}}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \hat{\mathcal{C}}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \mathcal{C}^{k,2}.$$

Pour terminer les généralités sur le "complexe de Spencer non-linéaire sophistiqué", notons ceci: soit $F \in \tilde{Q}^k$, avec $k \geq 1$; alors l'action de F^{-1} sur $\Lambda J^0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^k(\mathcal{T})$ passe au quotient pour donner une action de F^{-1} sur $\mathcal{B}^k$; pour s'en convaincre, il suffit de remarquer ceci: soit $u \in \Lambda^{p-1} J^0(\mathcal{T})^* \otimes \underline{I}^{k+1}$, et soit F_1 un relèvement de F à $\mathcal{Q}^{k+1}$; alors $F_1^{-1}(u)$ ne dépend que de F ; et, en le notant $F^{-1}(u)$, on a $\bar{\delta} F^{-1}(u) = F^{-1}(\bar{\delta} u)$ (cette dernière formule résulte de (3.10. iii) et de (5.6)). Pour F et $G \in \tilde{\mathcal{Q}}^k$, on a alors

$$(7.13) \quad \hat{\mathcal{D}}(FG) = \hat{\mathcal{D}}G + G^{-1}(\hat{\mathcal{D}}F)$$

qui résulte de la formule analogue pour $\bar{\mathcal{D}}$ (cette dernière résultant immédiatement de (5.6)).

Pour $u \in \mathcal{B}^{k,1}$, posons $u^F = \hat{\mathcal{D}}F + F^{-1}(u)$; on a

$$(7.14) \quad (u^F)^G = u^{FG}$$

formule qui, pour $u = 0$, se réduit à (7.3), et

$$(7.15) \quad \hat{\mathcal{G}}_1 u^F = F^{-1}(\hat{\mathcal{G}}_1 u) .$$

Enfin, si $u \in \hat{\mathcal{B}}^{k,1}$, on a $u^F \in \hat{\mathcal{B}}^{k,1}$.

Ces résultats s'établissent comme les précédents, et nous laissons les détails au lecteur.

Notons enfin que, pour $F \in \tilde{\mathcal{P}}^k$, de $F^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}^k) = \tilde{\mathcal{R}}^k$, on déduit $F^{-1}(\mathcal{C}^{k,p}) = \mathcal{C}^{k,p}$, d'où une "restriction" des formules précédentes à $\tilde{\mathcal{P}}^k$, $\mathcal{C}^{k,p}$ et $\hat{\mathcal{C}}^{k,1}$.

III. PROBLEMES D'EQUIVALENCE

8. Généralités

Soit Y une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, avec $\dim Y = \dim X = n$; soit $Q'^k = Q_{X,Y}^k$ l'ensemble des jets d'ordre k inversibles d'applications $X \rightarrow Y$; nous utiliserons dans cette nouvelle situation les mêmes notions que dans le cas $X = Y$, sans expliciter les définitions. Soient R^k une équation de Lie formellement intégrable sur X , avec $k \geq 1$, $P^k \subset Q^k$ sa forme finie, et soit $\mathcal{P}'^k$ une sous-variété de Q'^k . Posons $P^k(.,a) = \{F \in P^k \mid \text{but } F = a\}$, $a \in X$ et définissons de même $P'^k(.,b)$, $b \in Y$. La définition suivante est classique.

Définition (8.1). Nous dirons que P'^k est une P^k -structure (ou une $\tilde{R}^k$ -structure) si les conditions suivantes sont vérifiées.

- i) Sur P'^k , les projections "source" et "but" sont des submersions.
- ii) P^k opère principalement sur P'^k , au sens suivant: soit $F \in P'^k$, de source a , et de but b ; alors un voisinage de F dans $P'^k(.,b)$ est formé par l'ensemble des FG , $G \in P^k(.,a)$, G voisin de $I_k(a)$.

La première condition équivaut à ceci: par tout $F \in P'^k$ passe un germe de section étale de P'^k ; en fait, parmi les $F_1 \in J^1(P'^k)$, de projection F^0 , l'ensemble de ceux qui sont inversibles forme un ouvert dense.

Cette condition étant supposée vérifiée, la seconde équivaut à ceci: soit $P''^k = \{F \in Q_{Y,X}^k \mid F^{-1} \in P'^k\}$; alors, pour tout $F \in P''^k$ de source b et de but a , on a $V(P''^k)(F) = \tilde{R}^k(a)F$.

En considérant Q'^k comme un ensemble de jets de sections du fibré trivial $X \times Y \rightarrow X$, on interprète P'^k comme une équation différentielle d'ordre k dans ce fibré qui est l'analogue d'une équation linéaire avec second membre, P^k étant l'analogue d'une équation homogène. Donnons quelques mots d'explication, sans entrer dans des définitions "en forme"; une telle équation intervient lorsqu'on cherche à comparer deux "structures infinitésimales" σ sur X et σ' sur Y (par exemple deux tenseurs, deux opérateurs différentiels, etc...; cf. l'exemple (4.2)): R^k (resp P^k) est alors l'équation des automorphismes infinitésimaux (resp. des automorphismes) de σ , et P'^k l'équation des difféomorphismes $X \rightarrow Y$ qui transforment σ en σ' ; trouver des germes de solutions de P'^k revient à montrer l'équivalence locale σ et σ' ; si $X = Y$, trouver une solu-

tion inversible de P'^k revient à montrer l'équivalence globale de σ et σ' (mais nous n'aborderons pas ce problème ici).

Soit $F \in P'^k$, de source a , et soit $G \in \mathcal{P}_a^k$; avec $G(a) = F$; l'application $\xi \mapsto G\xi$ ($\xi \in R^k(a)$, $\xi = v^{-1}\eta$) permet, en raisonnant comme au lemme (6.14) et au lemme (6.15), de définir un isomorphisme du complexe (6.12) $_{k+l}$ ($l \geq 0$) sur le complexe de δ -cohomologie de P'^k en F . D'autre part, on a le résultat suivant

Proposition (8.2). *Soit $F \in P'^k$; les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) *Il existe $F_1 \in (P'^k)^{(1)}$, avec $\pi_k F_1 = F$;*

ii) *Pour un (ou, pour tout) $F_2 \in \tilde{J}^1(P'^k)$, avec $\pi_1 F_2 = F$, on a $p_1(\hat{\mathcal{G}})F_2 \in C^{k,1}$.*

Supposons qu'il existe un $F_2 \in \tilde{J}^1(P'^k)$, qui vérifie ii); on a en fait $p_1(\hat{\mathcal{G}})F_2 \in \hat{C}^{k,1}$; d'après la proposition (7.10), il existe $G \in \tilde{J}_0^1(P^k)(a)$, avec $p^1(\hat{\mathcal{G}})F_2 = p^1(\hat{\mathcal{G}})G$; on a alors $G^{-1}F_2 \in \tilde{J}^1(P'^k)$ et $p_1(\hat{\mathcal{G}})(G^{-1}F_2) = 0$, donc par (7.5), $G^{-1}F_2 \in \lambda^1 Q'^{k+1} \cap \tilde{J}^1(P'^k)$ et par conséquent $(\lambda^1)^{-1}G^{-1}F_2 \in (P'^k)^{(1)}$. L'implication i) $\Rightarrow$ ii) se démontre en renversant le calcul.

De là, en raisonnant comme au théorème (6.16), on déduit le théorème suivant:

Théorème (8.3) ("2e théorème fondamental"). *Supposons que R^k soit 2-acyclique et que, en tout point $F \in P'^k$, la condition d'intégrabilité (8.2. ii) soit satisfaite. Alors P'^k est formellement intégrable.*

Dans le cas analytique (i.e., si X, Y, P^k et P'^k sont analytiques), on en déduit, par le théorème de Cartan-Kähler-Kuranishi l'existence, pour tout $F \in P'^k$, d'une solution f de P'^k au voisinage de $a = \text{source } F$ vérifiant $\tilde{j}^k f(a) = F$ (voir, par exemple [16] ou l'appendice du présent article).

Définition (8.4). Nous dirons que P'^k est intégrable s'il est formellement intégrable et si, pour tout $F \in P'^k$, il existe $f \in \text{Diff}(X, Y)$ (= le faisceau des germes de difféomorphismes de X dans Y) vérifiant $\tilde{j}^k f \in \mathcal{P}'^k$ et $\tilde{j}^k f(a) = F$ ($a = \text{source } F$).

Etudier l'intégrabilité de P'^k revient à étudier la 1-cohomologie du complexe (7.9); pour le voir, il est commode de travailler dans les germes en un point fixé (ce qui revient à étudier les problèmes d'équivalence locaux "avec points marqués"). Le germe de variété (P'^k, F) , avec $a = \text{source } F$ sera appelé un "germe de P^k -structure en a "; deux tels germes (P'^k, F) et (P''^k, G) , avec $P''^k \subset Q_{X,Z}^k$ (Z une variété de dimension n) sont dits "équivalents" si la condition suivante est satisfaite: notons b (resp. c) le but de F (resp. G); alors il existe un germe de difféomorphisme $\varphi: (Y, b) \rightarrow (Z, c)$ vérifiant $\tilde{j}^k \varphi(P'^k, F) = (P''^k, G)$. Soit $H^1(\mathcal{P}_a^k)$ l'ensemble des classes d'équivalences de germes en a de P^k -structures formellement intégrables; pour qu'un germe (P'^k, F) soit équivalent à $(P^k, I_k(a))$ il faut et il suffit que P'^k soit "intégrable en F ", i.e., qu'il existe $f \in \text{Diff}(X, Y)_a$, avec $\tilde{j}^k f(a) = F$, $\tilde{j}^k f \in \mathcal{P}'^k$.

Soit $\mathcal{P}_{a,0}^k$ l'ensemble des $F \in \mathcal{P}_a^k$, avec $F(a) = I_k(a)$; c'est un groupe qui, d'après (7.14) et (7.15) opère à droite dans l'ensemble $\mathcal{P}_a^{k,1}$ des $u \in \mathcal{P}_a^{k,1}$ vérifiant $\hat{\mathcal{G}}_1 u = 0$; posons $\hat{H}^1(\mathcal{P}_a^k) = \mathcal{P}_a^{k,1} / \mathcal{P}_{a,0}^k$.

Supposons R^k 2-acyclique, et soit (P'^k, F) un germe de P^k -structure formellement intégrable (ou, ce qui revient au même, vérifiant la proposition (8.2, ii) en tout point G voisin de F). Soit $H \in \mathcal{P}'^k_a$, avec $H(a) = F$, et soit u la classe de $\hat{\mathcal{O}}H$ dans $\hat{H}^1(\mathcal{P}^k_a)$; cette classe ne dépend pas du H choisi; en effet, si l'on en prend un autre, soit H' , on aura $H' = HG$, avec $G \in \mathcal{P}^k_{a,0}$; d'où, par (7.13) $\hat{\mathcal{O}}H' = (\hat{\mathcal{O}}H)^G$; si l'on prend $\varphi \in \text{Diff}(Y, Z)_b$, $b = \text{but } F$, de $\hat{\mathcal{O}}(\tilde{f}^k\varphi, H) = \hat{\mathcal{O}}H$, on déduit que l'image du germe $\tilde{f}^k\varphi(P'^k, F)$ dans $\hat{H}^1(\mathcal{P}^k_a)$ est la même que celle de (P'^k, F) . On obtient ainsi une application $H^1(\mathcal{P}^k_a) \rightarrow \hat{H}^1(\mathcal{P}^k_a)$, dont on voit qu'elle est injective en renversant les calculs précédents; la proposition (7.6) montre qu'elle est surjective. En résumé, on a le théorème suivant:

Théorème (8.5). *Si R^k est 2-acyclique, l'application précédente $H^1(\mathcal{P}^k_a) \rightarrow \hat{H}^1(\mathcal{P}^k_a)$ est un isomorphisme.*

Si l'on se place dans la catégorie des variétés et morphismes analytiques, ou formels, ce résultat, joint au théorème (8.3) montre qu'on a $\hat{H}^1(\mathcal{P}^k_a) = 0$. Ce résultat aurait d'ailleurs pu être obtenu directement, par une étude de l'équation $\hat{\mathcal{O}}F = u$ analogue à celle faite par Goldschmidt [9] dans le cas linéaire.

9. Généralisation du théorème de Newlander-Nirenberg

Nous nous plaçons ici dans la "catégorie $\mathcal{C}^\infty$ "; l'équation R^k sera dite analytique si elle provient d'une équation analytique sur X (supposé analytique-réel) par "oubli de la structure analytique".

Théorème (9.1). *Soit R^k une équation de Lie 2-acyclique, analytique, et elliptique. En tout point $a \in X$, on a $H^1(\mathcal{P}^k_a) = 0$.*

Autrement dit: dans les hypothèses précédentes, soit $P'^k \subset Q^k(X, Y)$ une P^k -structure de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifiant la condition d'intégrabilité proposition (8.2, ii); alors P'^k est intégrable. Ce résultat avait été conjecturé par Spencer [24].

En vertu du théorème (8.5), il suffit pour cela de démontrer le résultat suivant: soit $u \in \hat{\mathcal{C}}^{k,1}_a$, vérifiant $\hat{\mathcal{O}}_1 u = 0$; il existe $F \in \mathcal{P}^k_{a,0}$ vérifiant $\hat{\mathcal{O}}F = u$. Nous allons démontrer ce résultat par une généralisation de la méthode employée dans [18] pour démontrer le théorème de Newlander-Nirenberg [20] (qui en est le cas particulier suivant: $X = \mathbf{R}^{2n} \simeq \mathbf{C}^n$, $k = 1$, P^1 est l'équation des germes d'automorphismes holomorphes de $\mathbf{C}^n$, considérés comme germes de difféomorphismes de $\mathbf{R}^{2n}$, et R^1 est donc l'équation des automorphismes infinitésimaux de $\mathbf{C}^n$, en tant que variété analytique-complexe. Alors, P^1 est une structure presque-complexe et (8.2. ii) sa condition d'intégrabilité).

Le théorème étant local, on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et qu'on a $a = 0$; on peut aussi, en restreignant au besoin X , choisir une trivialisations analytique $X \times L \simeq \tilde{R}^k$ (resp. $X \times M \simeq C^{k,1}$, resp. $X \times N \simeq C^{k,2}$) du fibré vectoriel R^k (resp. $C^{k,1}$, resp. $C^{k,2}$, voir remarque (7.11)) sur X , où L , M et N sont des $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie; dans la suite, nous identifierons $\tilde{R}^k$ etc... à leurs trivialisations; on peut alors choisir des adjoints

à coefficients analytiques des opérateurs différentiels $\hat{D}: \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{C}^{k,1}$ et $\mathcal{C}^{k,1} \rightarrow \mathcal{C}^{k,2}$, adjoints qui sont respectivement un (M, L) et un (N, M) opérateur différentiel linéaire sur X d'ordre 1, et seront tous deux notés D^* .

Soit $z = (z_1, \dots, z_l)$ un système linéaire de coordonnées dans L ; soit d'autre part α la projection "source": $P^k \rightarrow X$; comme α est une submersion, et compte-tenu des isomorphismes $X \times L \simeq \tilde{R}^k \simeq V(P^k)(L_k)$, on peut, pour tout ouvert $U \subset \subset X$, avec $0 \in U$, trouver un ouvert $W \subset L$, avec $0 \in W$ et un isomorphisme analytique de fibrés sur U , $\varphi: U \times W \rightarrow$ (un voisinage de I_k dans) $\alpha^{-1}(U)$ possédant les propriétés suivantes:

- 1) $\varphi(U \times \{0\}) = I_k$;
- 2) pour tout $x \in U$, l'isomorphisme $(\partial\varphi/\partial z)(x, 0): L \rightarrow V(P^k)(I_k(x))$ coïncide avec l'isomorphisme ci-dessus.

Les sections de P^k au-dessus de U (et assez voisines de I_k) s'identifient donc aux applications $x \mapsto Z(x)$ de U dans W , ceci dans le cas analytique comme dans le cas $\mathcal{C}^\infty$; en restreignant au besoin W , on peut supposer que les sections qui vérifient, pour tout $x \in U$ et pour $i = 1, \dots, n$: $(\partial Z/\partial x_i)(x) \in W$ sont étales (puisque toute section de P^k , $\mathcal{C}^1$ -voisine de I_k est étale).

Cela posé, revenons à notre problème; comme l'équation $\hat{\mathcal{G}}F = u$, $F(0) = I_k(0)$ admet une solution formelle en 0, on peut par une transformation préliminaire se ramener au cas où $j^1u(0) = 0$ (on pourrait même supposer que u s'annule en 0 à un ordre arbitrairement grand, voire infini, en 0, mais peu importe). En restreignant au besoin X, U , etc..., on peut supposer que u est défini sur X entier et y vérifie $\hat{\mathcal{G}}_1u = 0$; enfin, en remplaçant F par F^{-1} , on remplace l'équation $\hat{\mathcal{G}}F = u$ par $u^F = 0$. Nous allons démontrer d'abord le résultat suivant, en apparence plus faible:

Proposition (9.2). *Si U est assez petit, il existe $F \in \Gamma(U, \tilde{\mathcal{P}}^k)$, avec $j^1F(0) = j^1I_k(0)$, tel qu'on ait $D^*(u^F) = 0$.*

Dans notre système de coordonnées, l'application $F \mapsto u^F$ s'écrit

$$Z \mapsto \left\{ x \mapsto \Phi \left(x, Z(x), \frac{\partial Z}{\partial x_i}(x) \right) \right\},$$

où Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U \times W^{n+1}$, à valeurs dans M ; la condition $j^1F(0) = j^1I_k(0)$ s'écrit $Z(0) = (\partial Z/\partial x_i)(0) = 0$. Posons

$$(9.3) \quad D^*\Phi \left(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_i} \right) = \sum_{i \leq j} A_{ij} \left(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + B \left(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k} \right).$$

Lemme (9.4). *L'opérateur différentiel (linéaire, de L dans L)*

$$Z \mapsto \sum_{i \leq j} A_{ij}(0, 0, 0) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j}$$

est elliptique.

Considérons l'opérateur linéarisé de $F \mapsto D^*(u^F)$ le long de I_k , i.e., prenons une famille à un paramètre F_t avec $F_0 = I_k$, $(d/dt)F_t|_{t=0} = \xi \in \Gamma(U, \tilde{R}^k)$ et considérons l'application $\xi \mapsto (d/dt)D^*(u^{F_t})|_{t=0}$; on trouve immédiatement que cette application vaut $\xi \mapsto D^*\hat{D}\xi + D^*\theta(\xi)u$; comme $j^1u(0) = 0$, son symbole en $x = 0$ coïncide avec celui de $D^*\hat{D}$, qui est elliptique puisque $\hat{D}$ est elliptique (cf. [22] ou [9]). D'autre part, en calculant cet opérateur linéarisé en coordonnées, à partir de (9.3), on trouve que son symbole en $x = 0$ coïncide avec celui de (9.4). D'où le lemme.

La démonstration de la proposition (9.2) est alors une application usuelle de la théorie des équations elliptiques; il suffit même de recopier, avec des modifications mineures, un raisonnement de Agmon-Douglis-Nirenberg [1, Théorème 12.6]. Pour la commodité du lecteur, nous allons détailler un peu.

Soit $s \in]0, 1[$, fixé une fois pour toutes. Soit B une boule fermée de $\mathbf{R}^n$ (pour la norme euclidienne, notée $|\cdot|$); pour $k \in \mathbf{N}$, désignons par $\mathcal{C}^{s+k}(B)$ l'ensemble des fonctions sur B , à valeurs réelles, continues ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq k$, les dérivées d'ordre k vérifiant une condition de Hölder d'ordre s ; muni de la norme

$$\|f\|_{s+k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in B} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\substack{x, y \in B \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^s},$$

cet espace est complet. On trouve de même l'espace $\mathcal{C}^{s+k}(B) \otimes L$, qu'on notera $\mathcal{C}^{s+k}(B, L)$; dans la suite, nous supposons B centrée en 0, et nous désignerons par $\mathcal{C}_0^{s+k}(B, L)$ le sous-espace du précédent formé des Z vérifiant $Z(0) = (\partial Z / \partial x_i)(0) = 0$.

Lemme (9.5). *L'opérateur différentiel (9.4) est surjectif direct (i.e., admet un inverse à droite linéaire continu) de $\mathcal{C}_0^{s+2}(B, L)$ dans $\mathcal{C}^s(B, L)$.*

Soit φ une fonction $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, à support compact dans $2\hat{B}$, avec $\varphi = 1$ au voisinage de B . Etant donné $f \in \mathcal{C}^s(B, L)$, soit $\tilde{f}$ le prolongement de f défini, pour $x \notin B$, par $\tilde{f}(x) = \varphi(x)f(xr^2/|x|^2)$, $r =$ rayon de B ; il est facile de vérifier que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est continue de $\mathcal{C}^s(B, L)$ dans $\mathcal{C}^s(2B, L)$; de plus, $\tilde{f}$ est évidemment à support compact dans $2\hat{B}$.

Soit alors E une solution élémentaire à droite de l'opérateur (9.4), i.e., une distribution sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\text{Hom}(L, L)$, vérifiant

$$\sum A_{ij}(0, 0, 0) \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} = \delta \cdot \text{id},$$

δ la masse $+1$ en 0, et soit Z la restriction de $E * \tilde{f}$ à B . Si l'on choisit convenablement E , il est connu qu'on a, avec $K > 0$ convenable: $Z \in \mathcal{C}^{2+s}(B, L)$ et $\|Z\|_{2+s} \leq K \|\tilde{f}\|_s$ (voir [4], démonstration du théorème 2; en fait, *a posteriori*, le choix de E est inutile, puisque deux telles solutions élémentaires diffèrent par une fonction $\mathcal{C}^\infty$, et même analytique, mais peu importe ici); on a pour

$$\sum A_{ij}(0, 0, 0) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (E^* \bar{f}) = \bar{f} ;$$

ramener Z dans $\mathcal{C}_0^{s+2}(B, L)$, il suffit alors de le remplacer par $Z - Z(0) - \sum (\partial Z / \partial x_i)(0) x_i$, puisque les polynômes de degré 1 sont annulés par (7.4); d'où le lemme.

Fixons B une fois pour toutes, avec $B \subset U$, et soit $\mathcal{B}$ une boule de $\mathcal{C}^{s+2}(B, L)$, centrée en 0, et telle qu'on ait, pour $Z \in \mathcal{B}$, $x \in B$: $Z(x) \in W_1$, $\partial Z / \partial x_i \in W_1$, avec $W_1 \subset \subset W$. Considérons l'application

$$\Psi: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}^s(B, L)$$

définie par

$$\Psi(t, Z)(x) = \sum A_{ij} \left(tx, t^2 Z, t \frac{\partial Z}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + B \left(tx, t^2 Z, t \frac{\partial Z}{\partial x_k} \right) .$$

Cette application possède les propriétés suivantes:

1) Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$): ceci est un exercice de calcul différentiel banachique qui peut être laissé au lecteur.

2) On a $\Psi(0, 0) = 0$. En effet, on a par définition de Φ : $\Phi(x, 0, 0) = u(x)$, donc, puisque $j^1 u(0) = 0$, $\Phi(0, 0, 0) = (\partial \Phi / \partial x_i)(0, 0, 0) = 0$. D'autre part, si l'on pose $D^* = \sum a_i (\partial / \partial x_i) + a_0$ (les a_i étant des fonctions analytiques à valeurs dans $\text{Hom}(M, L)$), on a:

$$\begin{aligned} B \left(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k} \right) &= \sum_i a_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k} \right) + \sum_i a_i \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k} \right) \frac{\partial Z}{\partial x_i} \\ &\quad + a_0 \Phi \left(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k} \right) , \end{aligned}$$

d'où

$$B(0, 0, 0) = \sum a_i (\partial \Phi / \partial x_i)(0, 0, 0) + a_0 \Phi(0, 0, 0) = 0 .$$

3) La dérivée partielle $(\partial \Psi / \partial Z)(0, 0)$ est surjective directe, d'après lemme (9.5).

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe, pour t voisin de 0, un $Z_t \in \mathcal{B}$ vérifiant $\Psi(t, Z_t) = 0$. Alors la fonction Z définie au voisinage de 0 par $Z(x) = t^2 Z_t(x/t)$ satisfait (7.3), de plus, elle vérifie bien $Z(0) = (\partial Z / \partial x_i)(0) = 0$.

Reste à voir que Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0; cela se voit par un raisonnement classique sur les équations quasi-linéaires que nous allons répéter; posons $a_{ij}(x) = A_{ij}(x, Z, \partial Z / \partial x)$, $b(x) = B(x, Z, \partial Z / \partial x)$; alors Z vérifie l'équation linéaire

$$\sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + b(x) = 0$$

comme Z est de classe $\mathcal{C}^{s+2}$ dans un voisinage U_1 de a , les a_{ij} et b y sont de classe $\mathcal{C}^{s+1}$; en particulier notre équation, étant elliptique en 0, est elliptique dans un voisinage U_2 de 0; on peut supposer $U_1 = U_2$; appliquant [4, théorème 4] on trouve que Z est de classe $\mathcal{C}^{s+4}$ dans U_1 , donc a_i et b de classe $\mathcal{C}^{s+3}$, et ainsi de suite. Ceci achève la démonstration de la proposition (9.2).

Pour démontrer le théorème (9.1), posons maintenant $v = u^F$; on a $v(0) = 0$ puisque $u(0) = 0$, $j^1 F(0) = j^1 I_k(0)$; d'autre part, on a $D^*v = 0$ d'après (9.2) et $\hat{\mathcal{D}}_1 v = \hat{\mathcal{D}}v - \frac{1}{2}[v, v] = 0$ d'après (6.16); par suite, on a

$$(9.6) \quad \hat{D}D^*v + D^*\hat{D}v - \frac{1}{2}D^*[v, v] = 0.$$

Cette dernière équation est visiblement à coefficients analytiques en x, v, v'_i, v''_{ij} (elle est même polynomiale du second degré par rapport à (v, v'_i, v''_{ij})). Montrons que, au voisinage de 0, v est une solution elliptique de cette équation, i.e., que l'opérateur linéarisé de (9.6) le long de v est elliptique; ce dernier s'écrit en effet:

$$w \rightarrow \hat{D}D^*w + D^*\hat{D}w - D^*[w, v].$$

Il suffit de vérifier l'ellipticité en 0; or, du fait qu'on a $v(0) = 0$, on voit facilement que cet opérateur a même symbole en 0 que $w \rightarrow \hat{D}D^*w + D^*\hat{D}w$; on sait par ailleurs ([22] ou [9]) que ce dernier est elliptique; d'où le résultat. Il est alors connu que v est analytique au voisinage de 0 (voir par exemple [6]); d'après (8.3) et (8.5), il existe G , germe de section analytique $\mathcal{P}_{a,0}^k$, vérifiant $v^G = u^{FG} = 0$, d'où $\hat{\mathcal{D}}(G^{-1}F^{-1}) = u$, ce qui démontre le théorème.

Remarque (9.7). Si l'on cherche à démontrer le même résultat avec un minimum d'hypothèse de régularité sur u , la démonstration précédente doit être un peu modifiée, du fait que l'application $F \rightarrow F^{-1}(u)$ ne possèdera pas de bonnes propriétés de différentiabilité dans les espaces $\mathcal{C}^{s+k}$; on obtiendra une meilleure équation en travaillant avec $H = F^{-1}$ au lieu de F et en étudiant l'équation $H^{-1}(D^*(u^F)) = H^{-1}(D^*)(u - \hat{D}H) = 0$ au lieu de $D^*(u^F) = 0$; nous n'entrerons pas dans les détails (voir [18], pour le cas des structures presque complexes).

Signalons pour terminer deux conséquences du théorème (9.1) que nous ne développerons pas:

1) La théorie des déformations des P^k -structures intégrables, lorsque R^k est une équation de Lie 2-acyclique, analytique et elliptique sur une variété compacte, notamment la construction de "l'espace de Kuranishi" des P^k -structures intégrables voisines d'une P^k -structure donnée. Nous renvoyons pour cela à Quê [21], où la question est traitée dans le cas transitif (le cas général est analogue).

2) L'existence de coordonnées analytiques pour une équation de Lie de classe $\mathcal{C}^\infty$ elliptique et formellement transitive, i.e., $R^k \rightarrow T$ surjectif (d'où résulte que, dans le cas formellement transitif, le théorème (9.1) est vrai sans faire *a priori* d'hypothèse d'analyticité). Ce résultat s'obtient en combinant le théorème (9.1) et le "troisième théorème fondamental" de E. Cartan; voir [11].

APPENDICE

SUR LE THÉORÈME DE CARTAN-KÄHLER

1. Introduction

Le but de cet appendice est de donner une démonstration rapide du théorème d'existence des solutions d'une équation différentielle dans le cas analytique, une fois obtenus les résultats formels nécessaires, que nous ne reprendrons pas ici. Nous nous appuyons pour cela sur une majoration de Grauert [12], plutôt que sur les majorations pour la " $\bar{\partial}$ -cohomologie", à la Spencer [5]; d'ailleurs ces dernières avec un choix convenable de normes, sont essentiellement un cas particulier du théorème de Grauert.

2. Polydisques distingués

Soit $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ un système de n nombres > 0 , et soit P_ρ le polydisque de $\mathbb{C}^n$ défini par les équations $|z_i| < \rho_i$. Soit $H^1(P_\rho)$ l'espace des fonctions holomorphes sur P_ρ , $F = \sum f_\alpha \rho^\alpha$ pour lesquelles on a

$$\|F\|_\rho = \sum |f_\alpha| \rho^\alpha < +\infty;$$

si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, on le munira d'une norme $|\cdot|_E$, et pour $F = \sum f_\alpha z^\alpha \in E \otimes H^1(P_\rho)$, on posera encore

$$\|F\|_\rho = \sum |f_\alpha|_E \rho^\alpha.$$

Soient E et E_1 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, de dimensions finies, et soit $U = \sum u_\alpha z^\alpha$, $u_\alpha \in L(E, E_1)$ une fonction holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, à valeurs dans $L(E, E_1)$; pour ρ suffisamment petit l'application $U_\rho: F \mapsto UF$ envoie continuellement $E \otimes H^1(P_\rho)$ dans $E_1 \otimes H^1(P_\rho)$. Nous dirons par définition que " ρ est *U-privilegié*" si l'image de cette application est fermée, et formée de tous les $G \in E_1 \otimes H^1(P_\rho)$ qui, au voisinage de l'origine sont de la forme UF_1 , F_1 holomorphe à l'origine (comme il est bien connu, il revient au même de dire qu'il existe une série formelle en 0, soit F_2 , telle qu'on ait l'égalité entre séries formelles $G = UF_2$).

Théorème (2.1) (Grauert). *Les P_ρ tels que ρ soit U-privilegié forment un système fondamental de voisinages de 0.*

Pour la démonstration, nous renvoyons à Grauert [12] (en fait, Grauert travaille avec la norme L^∞ et non L^1 , mais la démonstration est identique). Notons aussi qu'un résultat analogue a été démontré par Douady [3] pour l'espace $B(P_\rho)$ des fonctions continues sur $\bar{P}_\rho$ et holomorphe sur P_ρ , muni de la norme

$$\sup_{z \in \bar{P}_\rho} |F(z)|,$$

et que la démonstration de Douady pourrait aussi bien être adaptée à l'espace $H^1(P_\rho)$.

Si ρ est U privilégié, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $G \in \text{Im}(U_\rho)$, on puisse trouver $F \in E \otimes H^1(P_\rho)$ vérifiant $UF = G$, $\|F\|_\rho \leq C\|G\|_\rho$; cela résulte du théorème "des homomorphismes" de Banach (et en fait, peut se démontrer directement en même temps que le théorème précédent).

Nous n'aurons besoin de ce résultat que dans le cas où U est un polynôme homogène de degré k , auquel cas il est clair que, si G est homogène de degré $k + l$, et si $UF = G$, $\|F\|_\rho \leq C\|G\|_\rho$, on a encore $UF_l = G$, $\|F_l\| \leq C\|G\|$, en désignant par F_l la composante homogène de degré l de F (pour un degré l fixé, une telle majoration est évidente; l'essentiel est qu'ici, C est indépendant de l).

Nous allons transposer ces résultats, soit $\sum_l$ l'espace des polynômes homogènes de degré l à n variables sur $\mathbb{C}$; son dual peut être identifié à $\sum_l$ au moyen du produit scalaire

$$\langle F, F' \rangle = \sum_{|\beta|=l} f_\beta f'_\beta;$$

si l'on munit $\sum_l$ de la norme $\|\cdot\|_\rho$, la norme duale est alors:

$$\|F'\|'_r = \sup_{\beta} |f'_\beta| r^\beta$$

avec $r_i = 1/\rho_i$ (ce que nous écrirons brièvement: $r = 1/\rho$). On définit de même la norme $\|\cdot\|'_r$ sur $E^* \otimes \sum_l (E^*, \text{dual de } E, \text{ muni de la norme duale})$. La transposée de $U(l)$, restriction de $F \mapsto UF$ à $E \otimes \sum_l$ est l'application

$$U(l)^*: E_1^* \otimes \sum_{k+l} \rightarrow E^* \otimes \sum_l$$

ainsi définie:

$$\text{si } F = \sum_{|\alpha|=k+l} f_\alpha z^\alpha, \quad U(l)^* F = \sum_{|\beta|=l} g_\beta z^\beta, \quad \text{avec } g_\beta = \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha^* f_{\alpha+\beta} \\ (u_\alpha^*, \text{ le transposé de } u_\alpha).$$

En transposant les résultats précédents, on obtient donc le

Corollaire (2.2). *Etant donné $U \in L(E, E_1) \otimes \sum_k$, il existe $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i > 0$ et $C > 0$ possédant la propriété suivante:*

Pour tout $l \in N$ et tout $G \in \text{Im } U(l)^*$, on peut trouver $F \in E_1^* \otimes \sum_{k+l} \text{ tel qu'on ait } U(l)^*F = G, \|F\|'_r \leq C \|G\|'_r$.

Nous dirons alors que r est *U-distingué*; dans ce cas, pour $\lambda > 0$, λ_r est évidemment encore *U-distingué*, avec C remplacé par $C\lambda^k$.

3. La norme "de Laplace" formelle

Pour des raisons de commodité, nous permuterons dans la suite les rôles de E et E^* ; pour

$$F = \sum_{|\alpha|=l} f_\alpha z^\alpha \in E \otimes \sum_l,$$

nous poserons

$\mathcal{L}F = \sum (\alpha! / |\alpha|!) f_\alpha z^\alpha$ ($\mathcal{L}$ est plus ou moins une transformation de Laplace-Borel), et

$$|F|_r = \|\mathcal{L}F\|'_r.$$

Si F est une série formelle à n variables sur C (à coefficients dans E), nous noterons F_l sa composante homogène de degré l , et nous poserons

$$F^l = F_0 + \dots + F_l,$$

$$|F|_r = \sum_{l \geq 0} |F_l|_r.$$

Pour $X = (X_1, \dots, X_n)$, on a

$$(X_1 + \dots + X_n)^l = \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} X^\alpha,$$

d'où en faisant $X_i = 1$:

$$\frac{l!}{\alpha!} \leq n^l;$$

on en déduit que, si l'on a $|F|_r < +\infty$, F est convergent au voisinage de l'origine; inversement, de l'inégalité évidente $\alpha! \leq |\alpha|!$, on déduit que, si F est convergente au voisinage de P_r , on a $|F|_r < +\infty$.

Si $F_0 = 0$, on a immédiatement

$$(3.1) \quad |F|_r \leq \sum r_i |\partial F / \partial z_i|_r.$$

Si F est homogène de degré l , on a

$$\left| \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|_r \leq \frac{l}{r_i} |F|_r,$$

d'où par récurrence

$$(3.2) \quad |D^\alpha F|_r \leq \frac{l!}{(l - |\alpha|)!} \frac{1}{r^\alpha} |F|_r .$$

Proposition (3.3). *Si F et G sont à valeurs scalaires, on a $|FG|_r \leq |F|_r |G|_r$. Pour $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, on a la formule du binôme*

$$(X + Y)^r = \sum_{\alpha + \beta = r} \frac{r!}{\alpha! \beta!} X^\alpha Y^\beta .$$

Prenons les X_i égaux à x , et les Y_i à 1; on a alors $(X + Y)^r = (x + 1)^{|r|}$; en calculant de deux manières le coefficient de x^l ($l \leq |\gamma|$) dans cette dernière expression, il vient

$$(3.4) \quad \sum_{\substack{\alpha + \beta = r \\ |\alpha| = l}} \frac{r!}{\alpha! \beta!} = \frac{|\gamma|!}{l!(|\gamma| - l)!} .$$

Démontrons maintenant la proposition (3.3); il suffit de traiter le cas où F et G sont homogènes, disons de degrés l et m .

On a alors

$$FG = \sum_{|\gamma| = l+m} \left(\sum_{\alpha + \beta = \gamma} f_\alpha g_\beta \right) z^\gamma .$$

D'où, d'après (3.4):

$$\frac{r!}{|\gamma|!} \left| \sum_{\alpha + \beta = \gamma} f_\alpha g_\beta \right| r^r \leq |F|_r |G|_r \frac{r!}{|\gamma|!} \sum_{\substack{\alpha + \beta = r \\ |\alpha| = l}} \frac{l!}{\alpha!} \frac{(|\gamma| - l)!}{\beta!} = |F|_r |G|_r ,$$

ce qui démontre la proposition.

La norme introduite ici étant "homogène", les inégalités précédentes peuvent être interprétées en termes de séries majorantes: si l'on a $F = \sum f_\alpha z^\alpha$, $f_\alpha \in E$, $g = \sum g_\alpha z^\alpha$, $g_\alpha \geq 0$, nous écrivons $F \ll G$; si l'on a, pour tout α : $|f_\alpha|_E \leq g_\alpha$; nous dirons alors que G est une majorante de F .

Soit alors X une indéterminée; posons $|F|_{X_r} = \sum |F_l|_r X^l$; les inégalités (3.1), (3.2) et la proposition (3.3) seront encore vraies avec r remplacé par X_r , et le signe $\leq$ par $\ll$. Soient d'autre part

$$\Phi \in C[[Y_1, \dots, Y_p]] , \quad \text{et} \quad F^{(1)}, \dots, F^{(p)} \in C[[z_1, \dots, z_n]] ,$$

les $F^{(i)}$ étant sans terme constant, il résulte de la proposition (3.3), interprétée en termes de séries majorantes que, si $\bar{\Phi}$ est une majorante de Φ , on a

$$(3.5) \quad |\Phi(F^{(1)}, \dots, F^{(p)})|_{X_r} \ll \bar{\Phi}(|F^{(1)}|_{X_r}, \dots, |F^{(p)}|_{X_r}) ;$$

si $F^{(1)}, \dots, F^{(p)}$ sont à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie, disons $F^{(i)}$ à valeurs dans $E^{(i)}$, et si Φ est une série formelle sur $E^{(1)} \times \dots \times E^{(p)}$, en choisissant convenablement les normes dans les $E^{(i)}$ (ce qui ne change

essentiellement rien), on voit qu'on pourra encore trouver une série $\bar{\Phi} \in C[[Y_1, \dots, Y_p]]$; à coefficients ≥ 0 , qui vérifie (3.5) quels que soient les $F^{(i)}$; si Φ est convergente, on pourra supposer $\bar{\Phi}$ convergente (nous laissons les détails au lecteur).

4. Equations différentielles

Soient E et E_1 deux espaces vectoriels de dimension finie sur C ; considérons une fonction Φ holomorphe au voisinage de

$$(z_0, y_\alpha^0) \in C^n \times \prod_{|\alpha| \leq k} E$$

à valeurs dans E_1 avec $\Phi(z_0, y_\alpha^0) = 0$ et considérons l'équation différentielle:

$$(E) \quad \Phi(z, D^\alpha F(z)) = 0.$$

Soit

$$F = \sum_{|\alpha| \leq k+l} f_\alpha (z - z_0)^\alpha$$

un polynôme de degré $\leq k + l$, à valeurs dans E , avec $(\alpha! f_\alpha) D^\alpha F(z_0) = y_\alpha^0$, pour $|\alpha| \leq k$; nous dirons que F est un jet d'ordre $k + l$ de solution de E , prolongeant le jet

$$F^k = \sum_{|\alpha| \leq k} f_\alpha (z - z_0)^\alpha$$

si le développement de $\Phi(z, D^\alpha F(z))$ en z_0 ne contient pas de termes de degré $\leq l$, ce que nous écrirons $\Phi(z, D^\alpha F(z)) \equiv 0 \pmod{(z - z_0)^\alpha}$. Pour $l' > l$, et F' jet de solution d'ordre $k + l'$, nous dirons de même que F' prolonge F si les coefficients d'ordre $\leq k + l$ de F' sont ceux de F .

Définition (4.1). Nous dirons que F^k est fortement prolongeable si $\forall l > 0$, tout jet de solution d'ordre $k + l$ qui prolonge F^k est lui-même prolongeable à l'ordre $k + l + 1$.

La partie analytique du théorème de Cartan-Kähler (compte non tenu des questions de données de Cauchy) est contenue dans le théorème suivant:

Théorème (4.2). Si F^k est fortement prolongeable, il existe une série $F = \sum f_\alpha (z - z_0)^\alpha$, convergente au voisinage de 0, avec $D^\alpha F(z_0) = y_\alpha^0, |\alpha| \leq k$, qui soit solution de l'équation (E).

On peut toujours se ramener au cas où $z_0 = 0, y_\alpha^0 = 0$, ce que nous supposons. Posons, pour $\alpha = k$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha}(0) = u_\alpha \in L(E, E_1), \quad \text{et} \quad \Psi(z, y_\alpha) = \sum_{|\alpha| = k} u_\alpha y_\alpha - \Phi.$$

Supposons trouvé un jet F^{k+l-1} d'ordre $k + l - 1$ de solution de E , et

cherchons à le prolonger à l'ordre $k + l$; dans l'équation que nous devons résoudre les termes $D^\alpha F_{k+l}$ n'interviennent que linéairement, et, en posant

$$F_{k+l} = \sum_{|\alpha|=k+l} f_\alpha z^\alpha ,$$

notre équation s'écrit:

$$\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |\beta|=l}} u_\alpha f_{\alpha+\beta} \frac{(\alpha + \beta)!}{\beta!} z^\beta = \Psi(z, D^\alpha F^{k+l-1})_l .$$

Par hypothèse, un tel F_{k+l} existe. Posons $U = \sum u_\alpha^* z^\alpha$, et choisissons une fois pour toutes un $r = (r_1, \dots, r_n)$ qui soit U -distingué. Il résulte alors du corollaire (1.2) que, si l'on pose

$$\Psi(z, D^\alpha F^{k+l-1})_l = \sum_{|\beta|=l} g_\beta z^\beta ,$$

on pourra trouver F_{k+l} vérifiant

$$\sup_{|\alpha|=k+l} \alpha! |f_\alpha| r^\alpha \leq C \sup_{|\beta|=l} \beta! |g_\beta| r^\beta ,$$

ce qui s'écrit encore

$$|F_{k+l}|_r \leq C \frac{l!}{(k+l)!} |\Psi(z, D^\alpha F^{k+l-1})_l|_r ,$$

d'où, d'après (3.2)

$$|D^\alpha F_{k+l}|_r \leq C_1 |\Psi(z, D^\beta F^{k+l-1})_l|_r \quad \text{avec} \quad |\alpha| \leq k , \quad C_1 = \sup_{|\alpha| \leq k} \frac{C}{r^\alpha} .$$

Soit $\bar{\Psi}$ une fonction holomorphe au voisinage de 0 dans

$$C^n \times \prod_{|\alpha| \leq k} C ,$$

à coefficients positifs, telle que (3.5) soit satisfaite avec Φ remplacée par Ψ ; on peut supposer qu'on a $\bar{\Psi}(0) = 0$ et $(\partial \bar{\Psi} / \partial y_\alpha)(0) = 0$ pour $|\alpha| = k$; on aura donc, avec les notations du § 3, pour $|\alpha| \leq k$

$$|D^\alpha F_{k+l}|_{X_r} \ll C_1 X^{k-|\alpha|} \bar{\Psi}(X_r, |D^\beta F^{k+l-1}|_{X_r})_l .$$

Ecrivons ces inégalités en y remplaçant successivement l par $1, 2, \dots, l$, et remarquons qu'on a évidemment, si $l' < l$:

$$|D^\beta F^{k+l'-1}|_{X_r} \ll |D^\beta F^{k+l-1}|_{X_r} ,$$

donc

$$\bar{\Psi}(X_r, |D^\beta F^{k+l'-1}|_{X_r})_{l'} \ll \bar{\Psi}(X_r, |D^\beta F^{k+l-1}|_{X_r})_{l'} ;$$

en ajoutant, il vient, pour $|\alpha| \leq k$

$$|D^\alpha F^{k+l}|_{X_r} \ll C_1 X^{k-|\alpha|} \bar{\Psi}(X_r, |D^\beta F^{k+l-1}|_{X_r}) .$$

Posons

$$A^{k+l}(X) = \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha F^{k+l}|_{X_r} ;$$

de (3.1) on déduit qu'on a, pour $K > 0$ convenable, indépendant de F :

$$|D^\beta F^{k+l-1}|_{X_r} \ll K X^{k-|\beta|} A^{k+l-1}(X) , \quad |\beta| \leq k$$

d'où finalement, avec $C_2 = C_1 \sum_{|\alpha|=k} 1$,

$$A^{k+l}(X) \ll C_2 \bar{\Psi}(X_r, K X^{k-|\alpha|} A^{k+l-1}(X)) .$$

Il existe $m > 0$ et $C_3 > 0$ tels qu'on ait, pour $|z| = \sup |z_i| \leq m$, $|y_\alpha| \leq m$ ($y_\alpha \in \mathbb{C}$),

$$|\bar{\Psi}(z, y_\alpha)| \leq C_3 [|z| + \sum_{|\alpha| \leq k-1} |y_\alpha| + \sum_{|\alpha|=k} |y_\alpha|^2] .$$

Par suite, il existe m' et C_4 , indépendants de l tels qu'on ait, pour $0 < \lambda \leq m'$, et $A^{k+l-1}(\lambda) \leq m'$:

$$A^{k+l}(\lambda) \leq C_4 [\lambda + \lambda A^{k+l-1}(\lambda) + A^{k+l-1}(\lambda)^2] .$$

Soit $A(\lambda)$ la solution de l'équation $A(\lambda) = C_4 [\lambda + \lambda A(\lambda) + A(\lambda)^2]$ qui tend vers 0 avec λ ; choisissons λ de manière à avoir $\lambda \leq m'$, et $A(\lambda) \leq m'$; pour $0 \leq a \leq A(\lambda)$, on a $0 \leq C_4 (\lambda + \lambda a + a^2) \leq C_4 [\lambda + \lambda A(\lambda) + A(\lambda)^2] = A(\lambda)$; de $A^k(\lambda) = 0$, on déduit alors par récurrence qu'on a $A^{k+l}(\lambda) \leq A(\lambda)$ pour tout l ; donc la série $\sum_l F_{k+l}$ est convergente; ceci démontre le théorème.

Bibliographie

- [1] S. Agmon, A. Douglis & L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*. I, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959) 623-727.
- [2] D. Bernard, *Sur la géométrie différentielle des G-structures*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **10** (1960) 153-273.
- [3] A. Douady, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **16** (1966) 1-98.
- [4] A. Douglis & L. Nirenberg, *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955) 503-538.
- [5] L. Ehrenpreis, V. W. Guillemin & S. Sternberg, *On Spencer's estimates for δ -Poincaré*. Ann. of Math. **82** (1965) 128-138.

- [6] A. Friedman, *Regularity of solutions of non-linear elliptic and parabolic equations*, J. Math Mech. **7** (1958) 43–60.
- [7] A. Frölicher & A. Nijenhuis, *Theory of vector-valued differential forms. I*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. **59** (1956) 338–359.
- [8] I. M. Gelfand & D. B. Fuks, *Cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970) 322–337, (en russe).
- [9] H. Goldschmidt, *Existence theorems for analytic linear partial differential equations*, Ann. of Math. **86** (1967) 246–270.
- [10] ———, *Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations*, J. Differential Geometry **1** (1967) 269–307.
- [11] ———, *Sur la structure des équations de Lie. I: Le troisième théorème fondamental*, J. Differential Geometry **6** (1972) 355–371; II: *Équations formellement transitives*, J. Differential Geometry **7** (1972) 67–95.
- [12] H. Grauert, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. No. 5 (1960) 1–64.
- [13] A. Grothendieck, *Techniques de construction en géométrie algébrique*, Séminaire H. Cartan, Paris, 1960–61, Exp. 7–17.
- [14] ———, *Crystals and the de Rham cohomology of schemes*, Notes by J. Coates and O. Jussila, Inst. Hautes Études Sci., 1966.
- [15] V. W. Guillemin & S. Sternberg, *Deformation theory of pseudogroup structures*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 64, 1966, 1–80.
- [16] M. Kuranishi, *Lectures on involutive systems of partial differential equations*, Publ. Soc. Mat. São Paulo, 1967, 1–75.
- [17] B. Malgrange, *Cohomologie de Spencer (d'après Quillen)*, Séminaire Math. Orsay, 1966.
- [18] ———, *Sur l'intégrabilité des structures presque-complexes*, Roma, Inst. Naz. Alta Mat. Sympos. Mat. **2** (1968) 289–296.
- [19] ———, *Pseudogroupes de Lie elliptiques*, Séminaire Leray, Collège de France, 1969–70.
- [20] A. Newlander & L. Nirenberg, *Complex coordinates in almost-complex manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957) 391–404.
- [21] N. Van Quê, *Non-abelian Spencer cohomology and deformation theory*, J. Differential Geometry **3** (1969) 165–211.
- [22] D. Quillen, *Formal properties of over-determined systems of linear partial differential equations*, Ph.D. thesis. Harvard University, 1964, non publié.
- [23] I. M. Singer & S. Sternberg, *The infinite groups of Lie and Cartan*, J. Analyse Math. **15** (1965) 1–114.
- [24] D. C. Spencer, *Deformation of structures on manifolds defined by transitive, continuous pseudogroups. I–II*, Ann. of Math. **76** (1962) 306–445; III, Ann. of Math. **81** (1965) 389–450.
- [25] ———, *On deformations of pseudogroups structures*, Global Analysis, Papers in honor of K. Kodaira, University of Tokyo Press and Princeton University Press, 1969, 367–395.
- [26] W. J. Sweeney, *The δ -Poincaré estimate*, Pacific J. Math. **20** (1967) 559–570.

