Ark. Mat., **56** (2018), 285–297
DOI : 10.4310/ARKIV.2018.v56.n2.a5

Inversion d'opérateurs de courbures au voisinage d'une métrique Ricci parallèle II : variétés non compactes à géométrie bornée

Erwann Delay

Résumé On considère une variété riemannienne (M,g) non compacte, complète, à géométrie bornée et courbure de Ricci parallèle. Nous montrons que certains opérateurs "affines" en la courbure de Ricci sont localement inversibles, dans des espaces de Sobolev classiques, au voisinage de g.

1. Introduction

Sur une variété Riemannienne (M,g), considérons $\mathrm{Ric}(g)$ sa courbure de Ricci et $R(g)$ sa courbure scalaire. Parmi les (champs de) 2-tenseurs symétriques géométriques naturels que l'on peut construire, les plus simples sont ceux qui seront "affines" en la courbure de Ricci, autrement dit, de la forme

$$\mathrm{Ein}(g) := \mathrm{Ric}(g) + \varkappa R(g)g + \Lambda g,$$

où $\varkappa$ et Λ sont des constantes. Ainsi, si $\varkappa=\Lambda=0$ on retrouve la courbure de Ricci, si $\varkappa=-\frac{1}{2}$ le tenseur d'Einstein (avec constante cosmologique Λ), enfin si $\varkappa=-\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda=0$ le tenseur de Schouten. Ce tenseur est géométriquement naturel : pour tout difféomorphisme φ assez régulier,

$$\varphi^* \mathrm{Ein}(g) = \mathrm{Ein}(\varphi^* g).$$

Mots clefs : variété non compacte, courbure de Ricci, 2-tenseurs symétriques, système elliptique quasi-linéaire, problème inverse, espaces de Sobolev.
2010 MSC : 53C21, 53A45, 58J05, 58J37, 35J62.

Nous nous posons ici le problème de l'inversion de l'opérateur Ein. On se donne donc E un champ de tenseur symétrique sur M, on cherche g métrique riemannienne telle

$$\mathrm{Ein}(g)=E. \tag{1.1}$$

On doit ainsi résoudre un système quasi-linéaire particulièrement complexe. La motivation d'une telle question, ainsi qu'une liste des travaux antérieurs sur le sujet, sont détaillés dans [6] et ses références, cette question y étant étudiée sur des variétés compactes.

L'objectif de cette note est de montrer que les résultats alors obtenus sont transposables à une large classe de variétés non compactes. Les preuves identiques ne seront pas reproduites. Cette exposition veut faire ressortir uniquement des ingrédients suffisants pour répondre au problème dans ce nouveaux contexte. Elle permettra une adaptation aisée à d'autres cadres. Par exemple, pour des géométries particulières, où l'on veut mesurer plus précisément le comportement des fonctions ou (champs de) tenseurs via des espaces à poids (variétés asymptotiquement cylindriques, asymptotiquement coniques, à cusps, à singularités coniques,...), il suffira de vérifier l'éventuelle validité des quelques étapes données ici. Parmis les varétés non compactes analysées par le passé, seuls certains cas de variétés d'Einstein asymptotiquement euclidiennes ou asymptotiquement hyperboliques sont traitées [5], [7]–[9]. En comparaison, il faut souliger la grande généralité du résultat donné ici. Il autorise, par exemple, tous les produits finits de variétes d'Einstein complètes à géométrie bornée, les (produits d')espaces modèles $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{S}^p$ et certains de leurs quotients. Cette généralisation est permise gràce à l'utilisation d'outils d'analyse adaptés, valables sous la condition de géométrie bornée (voir par exemple [11] section 2 ou [10]), certains sont rappelés en section 3.

On considère une variété riemannienne (M,g) sans bord, complète, non compacte, lisse et *Ricci parallèle*. Nous supposons de plus qu'elle est à *géométrie bornée* : son rayon d'injectivité est minoré (par une constante strictement positive) et toutes les dérivées covariantes de la courbure de Riemann sont bornées.

Notre but est de prouver un résultat d'existence locale sur M près de la métrique g. Nous travaillons pour cela dans des espaces de Sobolev classiques H^k de fonctions (ou champs de tenseurs, voir en section 3 pour une définition plus précise).

Un exemple de résultat que nous nous proposons de montrer ici est le suivant :

Théorème 1.1. *Soit* $s\in\mathbb{N}$ *tels que* $s>\frac{n}{2}$, $\varkappa=0$. *Soit* Λ *un réel tel que* -2Λ *n'est pas dans le spectre* L^2 *du Laplacien de Lichnerowicz* Δ_L, *ou bien est simplement dans son spectre discret. On suppose aussi que* -2Λ *n'est pas dans le spectre* L^2 *du Laplacien de Hodge agissant sur les* 1*-formes. Alors pour tout* $e\in H^{s+2}(M,\mathcal{S}_2)$

petit, il existe un unique h proche de zéro dans $H^{s+2}(M,\mathcal{S}_2)$ telle que

$$\mathrm{Ein}(g+h)+\frac{1}{2}\Pi(h)=\mathrm{Ein}(g)+e,$$

où $\Pi(h)$ est la projection orthogonale L^2 de h sur le noyau de $\Delta_L+2\Lambda$. De plus l'application $e\mapsto h$ est lisse au voisinage de zéro entre les espaces de Hilbert correspondants.

Pour Λ assez grand toutes les conditions sont clairement vérifiées et $\Pi=0$, l'équation (1.1) est donc résolue au voisinage de g.

Ce théorème est un cas particulier du théorème 4.1 où tous les $\varkappa\neq-1/n$ et $\varkappa\neq -1/2(n-1)$ sont aussi autorisés à condition que la métrique g soit en plus d'Einstein. L'analogue du résultat sur la courbure de Ricci contravariante obtenu dans [6] est facilement transposable dans ce nouveau contexte, il ne sera pas décrit ici.

La régularité de notre solution est optimale, il suffit de transporter l'équation par un difféomorphisme peu régulier pour s'en convaincre.

Le fait que la métrique de départ soit Ricci parallèle équivaut au fait qu'elle est localement le produit de métriques d'Einstein (voir par exemple [17]). Cette hypothèse est utilisisée à plusieurs étapes et semble difficile à améliorer.

Cette inversion nous permet ensuite, en section 5 de prouver que l'image de certains opérateurs de type Riemann-Christoffel sont des sous-variétés dans des espaces de Fréchet.

Remerciements. Je remercie Gilles Carron pour les références [15] et [2].

2. Définitions, notations et conventions

Pour une métrique riemannienne g, nous noterons ∇ sa connexion de Levi-Civita, par $\mathrm{Ric}(g)$ sa courbure de Ricci et par $\mathrm{Riem}(g)$ sa courbure de Riemann sectionnelle.

Soit $\mathcal{T}_p^q$ l'ensemble des tenseurs covariants de rang p et contravariants de rang q. Lorsque $p=2$ et $q=0$, on notera $\mathcal{S}_2$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques, qui se décompose en $\mathcal{G}\oplus\mathring{\mathcal{S}}_2$ où $\mathcal{G}$ est l'ensemble des tenseurs g-conformes et $\mathring{\mathcal{S}}_2$ l'ensemble des tenseurs sans trace (relativement à g). On utilisera la convention de sommation d'Einstein (les indices correspondants vont de 1 à n), et nous utiliserons g_{ij} et son inverse g^{ij} pour monter ou descendre les indices.

Le Laplacien (brut) est défini par

$$\triangle=-tr\nabla^2=\nabla^*\nabla,$$

où ∇^* est l'adjoint formel L^2 de ∇. Pour u un champ de 2-tenseur covariant symétrique, on définit sa divergence par

$$(\operatorname{div} u)_i = -\nabla^j u_{ji}.$$

Pour une 1-forme ω on M, on définit sa divergence par :

$$d^*\omega = -\nabla^i \omega_i,$$

et la partie symétrique de ses dérivées covariantes :

$$(\mathcal{L}\omega)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i),$$

(notons que $\mathcal{L}^* = \operatorname{div}$).

On définit l'opérateur de Bianchi des 2-tenseurs symétriques dans les 1-formes :

$$B_g(h) = \operatorname{div}_g h + \frac{1}{2} d(\operatorname{Tr}_g h).$$

Le Laplacian de Lichnerowicz agissant sur les (champs de) 2-tenseurs covariant symétriques est

$$\triangle_L = \triangle + 2(\operatorname{Ric} - \operatorname{Riem}),$$

où

$$(\operatorname{Ric}\, u)_{ij} = \frac{1}{2}[\operatorname{Ric}(g)_{ik} u^k_j + \operatorname{Ric}(g)_{jk} u^k_i],$$

et

$$(\operatorname{Riem}\, u)_{ij} = \operatorname{Riem}(g)_{ikjl} u^{kl}.$$

Le laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les 1-formes sera noté

$$\Delta_H = dd^* + d^* d = \Delta + \operatorname{Ric}.$$

3. Outils d'analyse

Les espaces que nous utiliserons sont les espace des Sobolev classique H^k de fonctions ou tenseurs ayant k dérivées covariantes (au sens des distributions) dans L^2. Plus précisément un champ de tenseur u est dans $H^k(M, \mathcal{T}^q_p)$ si u est dans H^k_{loc} et, la quantité suivante, qui représentera sa norme dans H^k est finie

$$\|u\|_k = \left(\int_M \sum_{i=0}^k \|\nabla^{(i)} u\|^2_g d\mu_g \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sous la condition de géométrie bornée (définie en introduction), ces espaces ont beaucoup de bonnes propriétés (voir aussi la section 2 de [11]) comme :

L'injection de Sobolev (voir [10] théorème 3.4 page 16 par exemple)

$$s > \frac{n}{2} + k \quad \Longrightarrow \quad H^s \subset C_b^k,$$

où C_b^k est l'ensemble des fonctions (ou champs de tenseurs) C^k sur M dont les dérivées covariantes d'ordre $\leq k$ sont bornées. Cette injection permet entre autre de s'assurer que les champs de 2-tenseurs symétriques de la forme $g+h$, avec h petit dans H^s, sont encore définit positifs.

Le lemme suivant a aussi son importance (voir [10] théorème 3.12 page 21 par exemple).

Lemme 3.1. *Soient $s > \frac{n}{2}$, $u \in H^s(M, \mathcal{T}_q^p)$ et $v \in H^s(M, \mathcal{T}_l^k)$ alors on a $u \otimes v \in H^s(M, \mathcal{T}_{q+l}^{p+k})$. De plus il existe une constante C, indépendante de u et v telle que*

$$\|u \otimes v\|_s \leq C \|u\|_s \|v\|_s.$$

Enfin, nous avons besoin de propriétés d'isomorphismes pour des opérateurs du type $\nabla^*\nabla +$ termes de courbures, agissant sur les champs de 2-tenseurs symétriques, sur les 1-formes, ou les fonctions. Nous renvoyons le lecteur à des références comme [15] ou [2] pour le vocabulaire et certains outils utilisés ici. On considère donc un fibré tensoriel E sur M et

$$P = \nabla^*\nabla + K,$$

où K est un endomorphisme borné de E. On suppose que

$$P : H^2(M, E) \longrightarrow L^2(M, E)$$

est Fredholm, en particulier le noyau L^2 de P est de dimension finie. Nous noterons alors Π la projection orthogonale L^2 sur $\ker P$. Ainsi, si $h_1, \ldots, h_k$ est une base L^2-orthonormée de $\ker P$,

$$\Pi(h) = \sum_{i=1}^{k} \langle h, h_i \rangle_{L^2} h_i.$$

Nous pouvons énoncer la

Proposition 3.2. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$. Alors $P + c\Pi$ est un isomorphisme de $H^{k+2}(M, E)$ dans $H^k(M, E)$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{K}$ le noyau de dimension finie de P, ces éléments sont lisses par régularité elliptique. On note $\mathcal{K}^\perp$, l'orthogonal L^2 de $\mathcal{K}$. Alors P étant Fredholm,

$$P: H^2 \cap \mathcal{K}^\perp \longrightarrow \mathcal{K}^\perp$$

est un isomorphisme. Ensuite tout élément $h \in H^2$ se décompose en

$$h = u^\perp + u \in (H^2 \cap \mathcal{K}^\perp) \oplus \mathcal{K}.$$

L'application

$$h \longmapsto P(u^\perp) + cu \in K^\perp \oplus \mathcal{K}$$

est clairement un isomorphisme, or c'est $P + c\,\Pi$. La régularité elliptique permet de conclure à l'isomorphisme entre les H^k (voir par exemple [10] théorème 3.31 page 36). □

Remarque 3.3. La proposition 3.2 sera utilisée avec des opérateurs de la forme $P = \nabla^*\nabla +$ termes de courbure $+\lambda$ qui sont essentiellement auto-adjoints (voir par exemple [13] qui généralise [4]) ([1]) et seront Fredholm pour $\lambda \in \mathbb{R}$ assez grand. En effet ils vérifient alors le critère de type Anghel (voir par exemple le théorème 3.16 dans [1]) : il existe un compact de M et une constante $c>0$ tel que pour tout champ u lisse à support hors de ce compact,

$$\|Pu\|_{L^2} \geq c\|u\|_{L^2}.$$

La densité des champs de tenseurs lisses à support compact dans H^k (valable par exemple sous la condition de géométrie bornée) ainsi que la régularité elliptique permet de conclure. Notons ici que le domaine de P agissant sur L^2 est bien H^2.

4. Le théorème principal

Il est maintenant bien connu que l'équation que nous voulons résoudre (1.1) n'est pas elliptique dû à l'invariance de la courbure par difféomorphisme. Nous allons modifier cette équation via un terme jauge en s'inspirant de la méthode de DeTurck.

Tout d'abord l'équation (1.1) est équivalente à

$$\mathrm{Ric}(g) = E - \frac{\varkappa \operatorname{Tr}_g E + \Lambda}{1 + n\varkappa} g.$$

1. On peut aussi supposer l'opérateur positif, et comme il est symétrique, il sera essentiellement auto-adjoint ([16] section 2). Plus généralement un endomorphisme borné $K + \lambda$ est clairement $\nabla^*\nabla$ borné et donc essentiellement auto-adjoint par le théorème de Kato-Rellich (voir preuve théorème X.15 dans [14]) sachant que $\nabla^*\nabla$ l'est [16]

Pour toute métrique g, $B_g(\mathrm{Ric}(g))=0$ par l'identité de Bianchi. Nous définissons donc

$$\mathcal{B}_g(E)=\mathrm{div}_g\,E+\frac{2\varkappa+1}{2(1+\varkappa n)}d\,\mathrm{Tr}_g\,E=B_g(E)-\frac{(n-2)\varkappa}{2(1+\varkappa n)}d\,\mathrm{Tr}_g\,E,$$

de sorte que l'identité de Bianchi se traduise ici par

$$\mathcal{B}_g(Ein(g))=0.$$

On définit [6] :

$$\mathcal{F}(h,e):=\mathrm{Ric}(g+h)-E+\frac{\varkappa\,\mathrm{Tr}_{g+h}\,E+\Lambda}{1+\varkappa n}(g+h)-\mathcal{L}_g\,\mathrm{Ein}_g^{-1}\,\mathcal{B}_{g+h}(E),$$

où Ein_g est l'endomorphisme de T^*M associé à $\mathrm{Ein}(g)$,

$$E=\mathrm{Ein}(g)+e-\frac{1}{2}\Pi(h),$$

et Π une projection L^2 sur un espace de dimension fini à préciser ultérieurement.

Proposition 4.1. *Pour $\varkappa\neq -1/n$, $s>\frac{n}{2}$, et g Ricci parallèle, l'application*

$$\mathcal{F}:H^{s+2}(M,\mathcal{S}_2)\times H^{s+2}(M,\mathcal{S}_2)\longrightarrow H^s(M,\mathcal{S}_2),$$

est bien définie et lisse au voisinage de zéro.

Démonstration. La preuve de cette proposition est renvoyée en appendice, elle utilise essentiellement le fait que sous ces hypothèses, l'espace H^s est “uniformément” stable par produit tensoriel (voir lemme 3.1). $\square$

Comme dans [6], pour une métrique d'Einstein ($\mathrm{Ein}(g)=\tau g$) ou si $k=0$ et g est Ricci parallèle, définissons l'opérateur

$$\begin{aligned}\mathcal{P}h &:= \Delta_L h+\tfrac{2(n\varkappa\tau+\Lambda)}{1+kn}h+\tfrac{\varkappa}{n(1+\varkappa n)}\Big((n-2)\Delta\,\mathrm{Tr}_g\,h-2n\tau\,\mathrm{Tr}_g\,h\Big)g\\ &= (\Delta_L+2\varkappa R(g)+2\Lambda)h+\tfrac{\varkappa}{n(1+\varkappa n)}\Big((n-2)\Delta\,\mathrm{Tr}_g\,h-2n\tau\,\mathrm{Tr}_g\,h\Big)g.\end{aligned}$$

Il sera lié à la différentielle de $\mathcal{F}$ comme nous allons voir ci-après. Notons qu'il respecte le scindage $\mathcal{S}_2=\mathcal{G}\oplus\mathring{\mathcal{S}}_2$. En particulier si u est une fonction sur M et $\mathring{h}$ un champ de 2-tenseurs symétrique sans trace, on a

$$\mathcal{P}(ug+\mathring{h})=\frac{1}{1+\varkappa n}p(u)g+\mathring{P}(\mathring{h}),$$

où

$$p(u)=(1+2(n-1)\varkappa)\Delta u+2\Lambda u,$$

et

$$\mathring{P}(\mathring{h}) = [\Delta_L + 2\varkappa R(g) + 2\Lambda]\,\mathring{h}.$$

Pour u une fonction sur M et $\mathring{h}$ un champ de 2-tenseurs symétrique sans trace, on définit

$$\Pi(ug+\mathring{h}) := \pi(u)g + \mathring{\Pi}(\mathring{h}),$$

où π est la projection L^2 sur noyau de p, et $\mathring{\Pi}$ la projection L^2 sur noyau de $\mathring{P}$. Ainsi si $h=ug$, et $\mathcal{B}_g \circ \Pi = 0$, on trouve [6] :

$$D_h\mathcal{F}(0,0)(ug) = \frac{1}{2}[p(u)+\pi(u)]g - \frac{(n-2)n\varkappa}{2(1+\varkappa n)}\mathring{\mathrm{Hess}}\,u,$$

où $\mathring{\mathrm{Hess}} u$ est la partie sans trace de la hessienne de u. Si $h=\mathring{h}$ est sans trace, avec toujours $\mathcal{B}_g \circ \Pi = 0$, on obtient [6] :

$$D_h\mathcal{F}(0,0)(\mathring{h}) = \frac{1}{2}\left(\mathring{P} + \mathring{\Pi}\right)\mathring{h}.$$

A ce stade il est important de noter que cette différentielle prend une forme simple par le fait que la métrique est Ricci parallèle.

Définissons enfin l'opérateur agissant sur les 1-formes :

$$P_H := \Delta_H + 2\varkappa R(g) + 2\Lambda.$$

Théorème 4.1. *Soient $s>n/2$, $\varkappa \neq -\frac{1}{n}, -\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda \in \mathbb{R}$. Soit g une métrique Ricci parallèle si $\varkappa=0$ et d'Einstein sinon, telle que $\mathrm{Ein}(g)$ est non dégénéré. On suppose que p, $\mathring{P}$ et P_H sont Fredholm de H^2 dans L^2, que le noyau L^2 de p est trivial ou réduit aux constantes, et que le noyau de P_H est trivial. Alors pour tout $e \in H^{s+2}(M,\mathcal{S}_2)$ petit, il existe un unique h proche de zéro dans $H^{s+2}(M,\mathcal{S}_2)$ telle que*

$$\mathrm{Ein}(g+h) = \mathrm{Ein}(g) + e - \frac{1}{2}\Pi(h),$$

De plus l'application $e \mapsto h$ est lisse au voisinage de zéro entre les espaces de Hilbert correspondants.

Démonstration. Nous reproduisons ici la preuve de [6] en soulignant quelques points. Les hypothèses sur les noyaux garantissent que les éléments du noyau de $\mathcal{P}$ sont de trace constante et à divergence nulle. On utilise aussi ici que la courbure de Ricci est parallèle afin d'avoir la propriété de commutation [12] :

$$\mathrm{div} \circ \Delta_L = \Delta_H \circ \mathrm{div}\,.$$

On a bien ainsi

$$\mathcal{B}_g \circ \Pi = 0.$$

Les analogues évident de la proposition 3.2 prouvent que $p+\pi$ et $\mathring{P}+\mathring{\Pi}$ sont des isomorphismes de H^{s+2} dans H^s et donc que $D_h\mathcal{F}(0,0)$ aussi. La proposition 4.1 et le théorème des fonctions implicites impliquent alors que pour $e\in H^{s+2}(M,\mathcal{S}_2)$ petit, il existe h proche de zéro dans $H^{s+2}(M,\mathcal{S}_2)$ tel que

$$\mathcal{F}(h,e)=0.$$

On applique maintenant B_{g+h} à cette équation ainsi

$$B_{g+h}\mathcal{F}(h,e)=-\mathcal{B}_{g+h}(E)-B_{g+h}\mathcal{L}_g\operatorname{Ein}_g^{-1}\mathcal{B}_{g+h}(E)=0.$$

On pose $\omega=\operatorname{Ein}_g^{-1}\mathcal{B}_{g+h}(E)$ alors

$$P_{g+h}\omega\ :=B_{g+h}\mathcal{L}_g\omega+\operatorname{Ein}_g\omega=0.$$

Mais par hypothèse

$$P_g=\frac{1}{2}(\Delta-\operatorname{Ric}_g)+\operatorname{Ein}_g=\frac{1}{2}(\Delta+\operatorname{Ric}_g+2\varkappa R(g)+2\Lambda)=\frac{1}{2}(\Delta_H+2\varkappa R(g)+2\Lambda)$$

est injectif, ainsi si h est petit P_{g+h} l'est encore donc $\omega=0$. □

Remarque 4.2. Pour Λ assez grand, les opérateurs p, $\mathring{P}$ et P_H sont Fredhlom de H^2 dans L^2 (voir remarque 3.3) de plus quitte à augmenter encore Λ on peut rendre leurs noyau trivial.

5. Opérateurs de type Riemann-Christoffel

Nous allons rappeler comment montrer que l'image de certain opérateurs de type Riemann-Christoffel, sont des sous variétés dans C^∞, au voisinage de la métrique g. Définissons un tenseur $\mathcal{E}in$ qui soit 4 fois covariant, ayant les mêmes propriétés algébriques que le tenseur de Riemann, affine en la courbure et dont la trace soit proportionnelle à Ein [6] :

$$\mathcal{E}in(g)=\operatorname{Riem}(g)+g\owedge(a\operatorname{Ric}(g)+bR(g)g+cg),$$

où $\owedge$ est le produit de Kulkarni-Nomizu ([3] p. 47),

$$a\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-1}{n-2}\right\},\quad c=\frac{1+(n-2)a}{2(n-1)}\Lambda,\quad b=\frac{\varkappa[1+a(n-2)]-a}{2(n-1)}.$$

On a alors

$$\operatorname{Tr}_g\mathcal{E}in(g)=[a(n-2)+1]\operatorname{Ein}(g).$$

La version de type Riemann-Christoffel de $\mathcal{E}in(g)$ est définie par

$$[g^{-1}\mathcal{E}in(g)]^i_{klm} := g^{ij}\mathcal{E}in(g)_{jklm}.$$

Considérons $\mathcal{R}^1_3$, le sous-espace de $\mathcal{T}^1_3$ des tenseurs vérifiants

$$\tau^i_{ilm}=0,\quad \tau^i_{klm}=-\tau^i_{kml},\quad \tau^i_{klm}+\tau^i_{mkl}+\tau^i_{lmk}=0.$$

On définit l'espace de Fréchet

$$H^\infty=\cap_{k\in\mathbb{N}}H^k,$$

munit de la famille de semi-normes $\{\|.\|_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. On procède alors de façons similaire à [7] pour prouver que

Théorème 5.1. *Sous les conditions du théorème 4.1, on suppose de plus que le noyau de $\mathcal{P}$ est trivial, autrement dit $\Pi=0$. Alors l'image de l'application*

$$\begin{array}{lll} H^\infty(M,\mathcal{S}_2) & \longrightarrow & H^\infty(M,\mathcal{R}^1_3) \\ h & \mapsto & (g+h)^{-1}\mathcal{E}in(g+h)-(g)^{-1}\mathcal{E}in(g) \end{array}$$

est une sous-variété lisse au voisinage de zéro.

A. Appendice

Nous justifions ici la proposition 4.1 par une preuve formelle (voir [7] pour une preuve similaire particulièrement détaillée). Nous pourrions omettre cet appendice, très similaire à celui de [5], qui utilise essentiellement le lemme 3.1. Nous avons choisi de l'adapter afin d'avoir une trame complète de la résolution du problème dans d'autres contextes.

Rappelons que la différence des courbures de Ricci s'exprime en coordonnées locales par

$$\mathrm{Ric}(g+h)_{jk}-\mathrm{Ric}(g)_{jk}=\nabla_l T^l_{jk}-\nabla_k T^l_{jl}+T^p_{jk}T^l_{pl}-T^p_{jl}T^l_{pk},$$

où

$$T^k_{ij}=\frac{1}{2}[(g+h)^{-1}]^{ks}(\nabla_i h_{sj}+\nabla_j h_{is}-\nabla_s h_{ij}).$$

Nous écrirons donc abusivement

$$\mathrm{Ric}(g+h)-\mathrm{Ric}(g)=\nabla T+TT,\quad T=(g+h)^{-1}\nabla h.$$

Ici nous avons h petit dans H^{s+2}, $s>\frac{n}{2}$. On a alors

$$(g+h)^{-1}=g^{-1}+\tilde{h},\quad \tilde{h}\in H^{s+2},$$

avec par inégalité triangulaire et par le lemme 3.1

$$\|\tilde{h}\|_{s+2}\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} C^k\|h\|_{s+2}^{k+1}=\frac{\|h\|_{s+2}}{1-C\|h\|_{s+2}}.$$

Pour $\|h\|_{s+2}\leq\frac{1}{2C}$, ce qu'on suppose désormais, on a

$$\|\tilde{h}\|_{s+2}\leq 2\|h\|_{s+2}.$$

On obtient alors, en utilisant encore le lemme 3.1, et en omettant dorénavant les constantes

$$T=(g^{-1}+\tilde{h})\nabla h\in H^{s+1},\quad \|T\|_{s+1}\leq\|h\|_{s+2},$$

et

$$\nabla T\in H^s,\quad \|\nabla T\|_s\leq\|T\|_{s+1}\leq\|h\|_{s+2},$$

d'où, toujours en utilisant le lemme 3.1,

$$\operatorname{Ric}(g+h)-\operatorname{Ric}(g)\in H^s,\quad \|\operatorname{Ric}(g+h)-\operatorname{Ric}(g)\|_s\leq\|h\|_{s+2}.$$

Étudions maintenant l'opérateur de Bianchi

$$\mathcal{B}_{(g+h)}(E)=\operatorname{div}_{(g+h)}E+\frac{2\varkappa+1}{2(1+\varkappa n)}d\operatorname{Tr}_{(g+h)}E,$$

que nous écrirons encore abusivement

$$\mathcal{B}_{(g+h)}(E)=(g+h)^{-1}(\nabla E+TE)+\nabla[(g+h)^{-1}E].$$

Compte tenu des calculs précédent et du fait que $E=\operatorname{Ein}(g)+e$ (avec $\nabla\operatorname{Ein}(g)=0$ par hypothèse), on a

$$\mathcal{B}_{g+h}(E)=(g^{-1}+\tilde{h})[\nabla e+T(\operatorname{Ein}(g)+e)]+\nabla[g^{-1}e+\tilde{h}(\operatorname{Ein}(g)+e)].$$

On estime alors comme précédemment

$$\mathcal{B}_{g+h}(E)\in H^{s+1},\quad \|\mathcal{B}_{g+h}(E)\|_{s+1}\leq(\|h\|_{s+2}+\|e\|_{s+2}),$$

et $\mathcal{L}_g\operatorname{Ein}_g^{-1}\mathcal{B}_{g+h}(E)\in H^s$,

$$\|\mathcal{L}_g\operatorname{Ein}_g^{-1}\mathcal{B}_{g+h}(E)\|_s\leq\|\mathcal{B}_{g+h}(E)\|_{s+1}\leq(\|h\|_{s+2}+\|e\|_{s+2}).$$

Il reste a estimer un terme d'ordre zéro :

$$Z := \frac{\varkappa \operatorname{Tr}_{g+h} E + \Lambda}{1+\varkappa n}(g+h) - E + \operatorname{Ric}(g)$$

On écrit encore formellement, en se souvenant ici que le premier "produit" est une trace,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\varkappa(g^{-1}+\tilde{h})(\operatorname{Ein}(g)+e)+\Lambda}{1+n\varkappa}(g+h) - (\operatorname{Ein}(g) - \operatorname{Ric}(g)+e) \\ &= \frac{\varkappa g^{-1}e + \varkappa\tilde{h}(\operatorname{Ein}(g)+e)+\Lambda+\varkappa \operatorname{Tr}_g \operatorname{Ein}(g))}{1+n\varkappa}(g+h) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - (\operatorname{Ein}(g) - \operatorname{Ric}_g + e). \end{aligned}$$

En développant, on remarque que le terme "constant" :

$$\frac{\Lambda + \varkappa \operatorname{Tr}_g \operatorname{Ein}(g)}{1+n\varkappa} g - (\operatorname{Ein}(g) - \operatorname{Ric}(g))$$

est nul et que l'on peut estimer comme auparavant, pour $k \neq -1/n$,

$$Z \in H^s, \quad \|Z\|_s \leq \|Z\|_{s+2} \leq (\|h\|_{s+2} + \|e\|_{s+2}).$$

Références

1. Albin, P., *Analysis on non-compact manifolds*, Notes for 18.158, Spring 2008. https://faculty.math.illinois.edu/~palbin/18158/home.html.
2. Bär, C., The Dirac operator on hyperbolic manifolds of finite volume, *J. Differential Geom.* **54** (2000), 439–488.
3. Besse, A. L., *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge **10**, Springer, Berlin, 1987.
4. Cordes, H. O., On essential selfadjointness of powers and comparison algebras. Festschrift on the occasion of the 70th birthday of Shmuel Agmon, *J. Anal. Math.* **58** (1992), 61–97.
5. Delay, E., *Inversion d'opérateurs de courbure au voisinage de la métrique euclidiennne*, bull. Soc. Math. France, à paraître, hal-00973138.
6. Delay, E., *Sur l'inversion de l'opérateur de Ricci au voisinage d'une métrique Ricci parallèle*, Annales de l'institut Fourier, à paraître, hal-00974707v2.
7. Delay, E., Etude locale d'opérateurs de courbure sur l'espace hyperbolique, *J. Math. Pures Appl.* **78** (1999), 389–430.
8. Delay, E., Study of some curvature operators in the neighbourhood of an asymptotically hyperbolic Einstein manifold, *Adv. Math.* **168** (2002), 213–224.
9. Delay, E. and Herzlich, M., Ricci curvature in the neighbourhood of rank-one symmetric spaces, *J. Geom. Anal.* **11** (2001), 573–588.

10. Eichhorn, J., *Global analysis on open manifolds*, Nova Science Publishers, New York, 2007. MR2343536 (2008i :58001)
11. Eichhorn, J., Partial differential equations on closed and open manifolds, in *Handbook of global analysis*, pp. 147–288, 1212, Elsevier, Amsterdam, 2008. MR2389635.
12. Lichnerowicz, A., Propagateurs et commutateurs en relativité générale, *Publ. Math. IHÉS* **10** (1961), 5–56.
13. Milatovic, O. and Truc, F., Self-adjoint extensions of differential operators on Riemannian manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **49** (2016), 87–103.
14. Reed, M. and Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics II : Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York, 1975.
15. Shubin, M., *Théorie spectrale sur les variétés non compactes, Méthodes semi-classiques (volume 1) École d'Été (Nantes, juin 1991)*, Astérisque (1991), no. 207, 224 pp.
16. Strichartz, R. S., Analysis of the Laplacian on a complete Riemannian manifold, *J. Funct. Anal.* **52** (1983), 48–79.
17. Wu, H., Holonomy groups of indefinite metrics, *Pacific J. Math.* **20** (1967), 351–392.

Erwann Delay
Labo. de Math. d'Avignon
Avignon Université
301 rue Baruch de Spinoza
F-84916
Avignon
France
and
F.R.U.M.A.M., Fr 2291 CNRS
Aix Marseille Université
3 place Victor Hugo
F-13331
Marseille
France
Erwann.Delay@univ-avignon.fr
http ://www.math.univ-avignon.fr

Received January 25, 2017
in revised form September 19, 2017