Résolubilité du problème de Cauchy pour certains opérateurs du type de Schrödinger

Par Jiro TAKEUCHI*)

(Communicated by Kiyosi ITÔ, M. J. A., April 13, 1998)

1. Introduction et énoncé des résultats. 1.1. On considère l'opérateur de 2-évolution au sens de Petrowsky [20]:

(1.1) $P(x, D_x, D_t) = D_t^m + a_1(x, D_x)D_t^{m-1} + \cdots + a_m(x, D_x),\ (x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^1$

avec

$$a_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \le 2j} a_{\alpha j}(x) D_x^\alpha \ (1 \le j \le m), \quad a_{\alpha j}(x) \in \mathscr{B}^\infty(\boldsymbol{R}^n),$$

$$D_t = -i\partial/\partial t,\ D_x = (D_1, \cdots, D_n), \quad D_j = -i\partial/\partial x_j\ (1 \le j \le n).$$

On suppose que le symbole principal $P_{2m}(\xi, \tau)$ de l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ au sens de Petrowsky [20] est à coefficients constants:

(1.2) $$P_{2m}(\xi, \tau) = \tau^m + \sum_{j=1}^{m} a_j^0(\xi)\tau^{m-j},$$

$$a_j^0(\xi) = \sum_{|\alpha|=2j} a_{\alpha j}\xi^\alpha \ (1 \le j \le m).$$

On note aussi, pour $k \ge 1$,

(1.3) $$P_{2m-k}(x, \xi, \tau) = a_1^k(x, \xi)\tau^{m-1} + \cdots + a_m^k(x, \xi),$$

(1.4) $$a_j^k(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2j-k} a_{\alpha j}(x)\xi^\alpha$$

en admettant que $a_j^k(x, \xi) \equiv 0$ lorsque $2j - k < 0$.

En particulier $P_{2m-1}(x, \xi, \tau)$ est le symbole sous-principal de $P(x, D_x, D_t)$ au sens de Petrowsky [20]. Notons que $P_{2m}(\xi, \tau)$ et $P_{2m-k}(x, \xi, \tau)$ sont quasi-homogènes de degré $2m$ et $(2m - k)$ en (ξ, τ) de poids (1,2) au sens suivant:

$$P_{2m}(r\xi, r^2\tau) = r^{2m}P_{2m}(\xi, \tau),\ P_{2m-k}(x, r\xi, r^2\tau) = r^{2m-k}P_{2m-k}(x, \xi, \tau),\ r \in \boldsymbol{R}.$$

Nous allons donner des conditions afin que le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps

$$(*)\ \begin{cases} P(x, D_x, D_t)u(x, t) = f(x, t) \text{ sur } \boldsymbol{R}^n \times [-T, T], \\ D_t^{j-1}u(0, x) = g_j(x) \text{ dans } \boldsymbol{R}^n\ (j = 1, \dots, m) \end{cases}$$

soit bien posé dans $C^m([-T, T]; H^\infty(\boldsymbol{R}^n))$.

On impose la condition suivante:

Condition (A.1). Les racines caractéristiques en τ de $P_{2m}(\xi, \tau)$ sont réelles pour $\xi \in \boldsymbol{R}^n$.

On dit alors que l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ est de type de Schrödinger. Remarquons que la condition (A.1) est nécessaire pour que le problème de Cauchy ($*$) soit bien posé dans $C^m([-T, T]; H^\infty(\boldsymbol{R}^n))$ même si les coefficients de P_{2m} dépendent de x.

Lorsque les racines caractéristiques sont simples, Takeuchi [23] a donné des conditions suffisantes et des conditions nécessaires de résolubilité du problème de Cauchy ($*$) dans les espaces de Sobolev. Dans cette Note, nous supposons que les racines caractéristiques sont multiples et de multiplicités constantes doubles; nous proposons des conditions analogues à la condition de Levi (Levi [12], A. Lax [9], Yamaguti [26], Mizohata-Ohya [15] et [16], Gourdin [6] etc.) et à la condition de bonne décomposition d'opérateurs (Ohya [17], Leray-Ohya [11], Vaillant [24] Matsuura [13], De Paris [3], Chazarain [1] etc.) dans le cas hyperbolique pour les opérateurs Kowalewskiens; notre formulation est analogue à celle de Mizohata-Ohya ([15], [16]).

On impose les conditions suivantes:

Condition (A.2). (i) Le symbole principal $P_{2m}(\xi, \tau)$ admet dans $\mathbf{C}[\xi, \tau]$ la décomposition en facteurs premiers $H_s(\xi, \tau)$ $(s = 0, 1)$, moniques en τ, notée

$$P_{2m}(\xi, \tau) = [H_0(\xi, \tau)]^2 H_1(\xi, \tau);$$

(ii) il existe deux entiers positifs m_0 et m_1 tels que $m_0 + m_1 = m$, $1 \le m_0 \le m_1$ et les polynômes $H_0(\xi, \tau)$ et $H_1(\xi, \tau)$ sont quasi- homogènes de degrés $2m_0$ et $2(m_1 - m_0)$ en (ξ, τ) de poids (1,2).

Condition (A.3). Les racines caractéristiques $\lambda_j^0(\xi)$ $(1 \le j \le m_1 = m - m_0)$ en τ du

Dédié à Professeur Jean Vaillant à l'occasion de son soixante-cinquième anniversaire.

*) 30−183, Katagihara-Takoden-cho, Nishikyo-ku, Kyoto 615−8161, Japan.

radical $R(\xi, \tau) = H_0(\xi, \tau)H_1(\xi, \tau)$ sont (réelles) non nulles et distinctes deux à deux pour $\xi \in \boldsymbol{R}^n\backslash 0$:

$$H_0(\xi, \tau) = \prod_{j=1}^{m_0}(\tau - \lambda_j^0(\xi)),$$
$$H_1(\xi, \tau) = \prod_{j=m_0+1}^{m-m_0}(\tau - \lambda_j^0(\xi)).$$

Pour obtenir des conditions nécessaires, on impose la condition suivante plus faible que la condition (A.3):

Condition (A.3)′. Les racines caractéristiques $\lambda_j^0(\xi)$ $(1 \leq j \leq m_1 = m - m_0)$ en τ du radical $R(\xi, \tau) = H_0(\xi, \tau)H_1(\xi, \tau)$ sont distinctes deux à deux pour $\xi \in \boldsymbol{R}^n\backslash 0$.

Remarque 1. Sous les conditions (A.1), (A.2) et (A.3)′, les racines caractéristiques $\lambda_j^0(\xi)$ en τ de $P_{2m}(\xi, \tau)$ sont positivement homogènes de degré 2 en $\xi \in \boldsymbol{R}^n\backslash 0$.

On note $\partial_0 = 1$, $\partial_j = D_t - \lambda_j^0(D_x)$ $(1 \leq j \leq m - m_0)$. Sous les conditions (A.2) et (A.3)′, l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ s'exprime comme suit:

$$(1.5)\quad P(x, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^{m-m_0} b_{m-m_0-j}(x, D_x)\partial_j\cdots\partial_1\partial_0\partial_{m_0}\cdots\partial_1\partial_0 + \sum_{j=0}^{m_0-1} b_{m-j}(x, D_x)\partial_j\cdots\partial_1\partial_0,$$

où $b_0(x, D_x) = 1$, $b_j(x, D_x) \in OPS_{1,0}^{2j-1}(\boldsymbol{R}^n)$ $(1 \leq j \leq m)$, l'opérateur $b_j(x, D_x)$ $(1 \leq j \leq m)$ est uniquement déterminé par $P(x, D_x, D_t)$ modulo $OPS^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n)$.

On impose les conditions suivantes:

Condition (B). Pour $0 \leq j \leq m_0 - 1$, on a

$$b_{m-j}(x, D_x) \in OPS_{1,0}^{2(m-j-2)}(\boldsymbol{R}^n).$$

Condition (B)′. Pour $0 \leq j \leq m_0 - 1$, on a

$$b_{m-j}(x, D_x) \in OPS_{1,0}^{2(m-j-1)}(\boldsymbol{R}^n).$$

Condition (C). Pour le symbole sous-principal $a_j^1(x, \xi)$ de l'opérateur $a_j(x, D_x)$ $(1 \leq j \leq m - m_0)$, on a

(i) $|D_x^\beta \operatorname{Im} a_j^1(x, \xi)| \leq C_\beta < x >^{-1-\min(|\beta|, 1)-\varepsilon} < \xi >^{2j-1}$ $(\varepsilon > 0)$,

(ii) $|D_x^\gamma \operatorname{Re} a_j^1(x, \xi)| \leq C_\gamma < x >^{-1} < \xi >^{2j-1}$ $(|\gamma| \geq 1)$.

Nos résultats s'énoncent ainsi:

Théorème 1. *On suppose les conditions* (A.1) *à* (A.3), (B) *et* (C) *vérifiées. Alors, le problème de Cauchy* ($*$) *pour le futur et pour le passé en même temps est bien posé dans* $H^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. *Plus précisément, pour tout* $(g_1(x), \ldots, g_m(x)) \in (H^\infty(\boldsymbol{R}^n))^m$ *et tout* $f(x, t) \in C^0([-T, T]; H^\infty(\boldsymbol{R}^n))$, *il existe une solution unique* $u(x, t)$ *du problème de Cauchy* ($*$) *telle que* $u(x, t) \in C^m([-T, T]; H^\infty(\boldsymbol{R}^n))$ *et de plus on a l'inégalité d'énergie suivante: pour toute* $u(t) = u(x, t) \in C^m([-T, T]; H^\infty(\boldsymbol{R}^n))$ *on a*

$$\Big(\sum_{k=1}^{m-1} \| < D_x >^{2(m-1-k)} D_t^{k-1}u(t)\|_s^2\Big)^{1/2}$$
$$(1.6)\quad \leq C(s, T)\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{m} \| < D_x >^{2(m-k)} D_t^{k-1}u(0)\|_s^2\Big)^{1/2} + \Big|\int_0^t \|P(x, D_x, D_\tau)u(\tau)\|_s d\tau\Big|\Big\},\ t \in [-T, T].$$

Théorème 2. *On suppose les conditions* (A.1), (A.2) *et* (A.3)′ *vérifiées. Alors, afin que le problème de Cauchy* ($*$) *pour le futur et pour le passé en même temps soit bien posé dans* $H^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, *il est nécessaire que la condition* (B)′ *soit vérifiée.*

1.2. On impose d'autres conditions analogues à la décomposition parfaite de Kumano-go [8]:

Condition (D.1). Le polynôme $H_0(\xi, \tau)$ divise $P_{2m-1}(x, \xi, \tau)$ dans $\mathscr{B}[\xi, \tau]$ où $\mathscr{B} = \mathscr{B}^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ est l'anneau des fonctions infiniment différentiables et bornées avec leurs dérivées:

$$P_{2m-1}(x, \xi, \tau) = \tilde{P}_{2m_1-1}(x, \xi, \tau)H_0(\xi, \tau).$$

Condition (D.2). Le polynôme $H_0(\xi, \tau)$ divise $P_{2m-2}(x, \xi, \tau)$ dans $\mathscr{B}[\xi, \tau]$:

$$P_{2m-2}(x, \xi, \tau) = \tilde{P}_{2m_1-2}(x, \xi, \tau)H_0(\xi, \tau).$$

Sous les conditions (A.1) à (A.3), $\tilde{P}_{2m_1-s}(x, \xi, \tau)$ $(s = 1, 2)$ s'expriment uniquement dans $(\mathscr{B}[\xi])[\tau]$ comme suit:

$$\tilde{P}_{2m_1-s}(x, \xi, \tau) = Q_{2m_0-s}(x, \xi, \tau)H_1(\xi, \tau) + H_0(\xi, \tau)R_{2m_2-s}(x, \xi, \tau),$$

où $m_2 = m_1 - m_0 = m - 2m_0$.

Condition (D.3). Le polynôme $H_0(\xi, \tau)$ divise

$$\tilde{P}_{2m-3}(x, \xi, \tau) = P_{2m-3}(x, \xi, \tau) - \sum_{|\alpha|=1} H_0^{(\alpha,0)}(\xi, \tau)Q_{2m_0-1}(x, \xi, \tau)R_{2m_2-1(\alpha)}(x, \xi, \tau) - \sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\{(H_0)^2\}^{(\alpha,0)}(\xi, \tau)R_{2m_2-1(\alpha)}(x, \xi, \tau)$$

dans $\mathscr{B}[\xi, \tau]$ où $f_{(\beta)}^{(\alpha,j)}(x, \xi, \tau) = (iD_\xi)^\alpha(iD_\tau)^j D_x^\beta f(x, \xi, \tau)$.

Remarque 2. Les polynômes $Q_s(x, \xi, \tau)$ et $R_s(x, \xi, \tau)$ en (ξ, τ) dans les conditions (D.1) à (D.3) sont quasi-homogènes de degré s en (ξ, τ) de poids (1,2).

Nos résultats s'énoncent ainsi:

Théorème 3. *On suppose les conditions* (A.1) *à* (A.3), (D.1) *à* (D.3) *et* (C) *vérifiées. Alors, la conclusion du théorème* 1 *est vérifiée.*

Théorème 4. *Sous les conditions* (A.1), (A.2) *et* (A.3)′, *afin que le problème de Cauchy* ($*$) *pour le futur et pour le passé en même temps soit bien posé dans* $H^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$, *il est nécessaire que la condition* (D.1) *soit vérifiée.*

Remarque 3. Les conditions (D.1) à (D.3) sont différentes de celles de Gourdin-Ngnosse-Takeuchi [7].

2. Interpolation d'Hermite et conditions de Levi. On donne l'expression explicite du symbole de l'opérateur $b_j(x, D_x)$ $(1 \le j \le m)$ dans (1.5) en utilisant le symbole de l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ afin d'obtenir les conditions concrètes équivalentes à la condition (B).

Comme la partie principale $P_{2m}(D_x, D_t)$ de l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ est à coefficients constants, on a $P_{2m}(D_x, D_t) = \partial_{m-m_0} \cdots \partial_1 \partial_0 \partial_{m_0} \cdots \partial_1 \partial_0$.

Donc, l'equation (1.5) entraîne que

$$
\begin{aligned}
(2.1)\quad & P(x, D_x, D_t) - P_{2m}(D_x, D_t) \\
& = \sum_{j=0}^{m-m_0-1} b_{m-m_0-j}(x, D_x)\partial_j \cdots \partial_1\partial_0\partial_{m_0} \cdots \partial_1\partial_0 \\
& \quad + \sum_{j=0}^{m_0-1} b_{m-j}(x, D_x)\partial_j \cdots \partial_1\partial_0.
\end{aligned}
$$

Pour $1 \le j \le m$, on note $b_j(x, \xi) \sim \sum_{l \ge 1} b_j^l(x, \xi)$ le développement asymptotique du symbole de l'opérateur $b_j(x, D_x)$ où $b_j^l(x, \xi)$ $(l \ge 1)$ est la partie positivement homogène de degré $(2j - l)$ en ξ dans $\{(x, \xi)\,;\, |\xi| \ge 1\}$ du symbole de l'opérateur $b_j(x, D_x)$.

L'équation (2.1) implique que, pour $l \ge 1$, on a

$$
\begin{aligned}
(2.2)\quad & P_{2m-l}(x, \xi, \tau) \\
& = \sum_{j=1}^{m-m_0-1} b^l_{m-m_0-j}(x, \xi)(\tau - \lambda_j^0(\xi)) \cdots (\tau - \lambda_1^0(\xi)) \\
& \qquad \times (\tau - \lambda_{m_0}^0(\xi)) \cdots (\tau - \lambda_1^0(\xi)) \\
& \quad + \sum_{j=1}^{m_0} b^l_{m-j}(x, \xi)(\tau - \lambda_j^0(\xi)) \cdots (\tau - \lambda_1^0(\xi)) \\
& \quad + b_m^l(x, \xi).
\end{aligned}
$$

Grâce à l'interpolation de Newton (van der Waerden [25], Courant-John [2], Powell [21], DeVore-Lorentz [4]) ou bien l'interpolation d'Hermite (DeVore-Lorentz [4]), on peut uniquement déterminer $b_j^l(x, \xi)$ comme fonction positivement homogène de degré $(2j - l)$ en $\xi \in \boldsymbol{R}^n \setminus 0$. En modifiant les fonctions $b_j^l(x, \xi)$ au voisinage de $\xi = 0$, on obtient le symbole de l'opérateur $b_j(x, D_x)$.

Proposition 1 (Conditions de Levi). *Sous les conditions* (A.2) *et* (A.3)′, *la condition* (B) *est équivalente à l'une des trois conditions suivantes*:

(L.1) *Tous les symboles* $b^l_{m-j}(x, \xi)$ $(0 \le j \le m_0 - 1,\ 1 \le l \le 3)$ *s'annulent identiquement pour* $(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$.

(L.2) *Toutes les fonctions* $P_{2m-l}(x, \xi, \lambda_j^0(\xi))$ $(1 \le j \le m_0,\ 1 \le l \le 3)$ *s'annulent identiquement pour* $(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$.

(L.3) *Pour* $1 \le l \le 3$, *le polynôme* $H_0(\xi, \tau)$ *divise* $P_{2m-l}(x, \xi, \tau)$ *dans* $(\mathscr{B}[\xi])[\tau]$, *où* $\mathscr{B} = \mathscr{B}^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$ *est l'anneau des fonctions infiniment différentiables et bornées avec leurs dérivées.*

Remarque 4. Les conditions (L.1) et (L.2) sont analogues à celles de Mizohata-Ohya ([15], [16]) dans le cas hyperbolique pour les opérateurs Kowalewskiens.

En combinant la proposition 1 et les résultats de Takeuchi ([23], pp. 40-55), on obtient la démonstration du théorème 1. Pour obtenir l'inégalité d'énergie (l'estimation a priori), on applique à 2-évolution (1.1) une méthode analogue à celles d'Ohya [18] et d'Oleinik [19]. Pour la démonstration du théorème 2, on construit une série de solutions asymptotiques (P. Lax [10], Flaschka-Strang [5], Takeuchi [22], [23]).

3. Condition de bonne décomposition. Sous les conditions (A.2) et (A.3)′, on peut décomposer parfaitement l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ en opérateurs pseudo-différentiels : la décomposition parfaite analogue à Kumano-go [8, Appendice II].

Proposition 2. *Sous les conditions* (A.2) *et* (A.3)′, *l'opérateur* $P(x, D_x, D_t)$ *se décompose comme suit*:

$$
\begin{aligned}
P(x, D_x, D_t) &= L_1(x, D_x, D_t) \\
& \quad \cdots L_{m_0}(x, D_x, D_t) \cdots L_{m-m_0}(x, D_x, D_t) \\
& \quad + R(x, D_x, D_t)\,;
\end{aligned}
$$

(1) *pour les racines caractéristiques doubles* $\lambda_j^0(\xi)$ $(1 \le j \le m_0)$,

$$
\begin{aligned}
L_j(x, D_x, D_t) &= (D_t - \lambda_j^0(D_x))^2 \\
& \quad + b_{j,1}(x, D_x)(D_t - \lambda_j^0(D_x)) + b_{j,2}(x, D_x),
\end{aligned}
$$

$$b_{j,k}(x, D_x) \in OPS_{1,0}^{2k-1}(\boldsymbol{R}^n) \quad (k = 1, 2),$$

où les opérateurs $b_{j,k}(x, D_x)$ $(k = 1, 2)$ *sont uniquement déterminés par l'opérateur* $P(x, D_x, D_t)$ *modulo* $OPS^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n)$;

(2) *pour les racines caractéristiques simples* $\lambda_j^0(\xi)$ $(m_0 + 1 \le j \le m - m_0)$,

$$L_j(x, D_x, D_t) = (D_t - \lambda_j^0(D_x)) + b_{j,1}(x, D_x),$$

$$b_{j,1}(x, D_x) \in OPS_{1,0}^{1}(\boldsymbol{R}^n),$$

où l'opérateur $b_{j,1}(x, D_x)$ *est uniquement déterminé par l'opérateur* $P(x, D_x, D_t)$ *modulo* $OPS^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n)$;

(3) *l'opérateur* $R(x, D_x, D_t)$ *s'écrit comme suit*:

$$R(x, D_x, D_t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(x, D_x) D_t^{m-k},\ c_k(x, D_x) \in OPS^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n).$$

Compte tenu de la proposition 2, on impose la condition suivante.

Condition (E) (Condition de bonne décomposition). L'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ se décompose comme suit:

$$P(x, D_x, D_t) = L_1(x, D_x, D_t) \cdots L_{m_0}(x, D_x, D_t) \cdots L_{m-m_0}(x, D_x, D_t) + R(x, D_x, D_t) ;$$

(1) pour les racines caractéristiques doubles $\lambda_j^0(\xi)$ $(1 \leq j \leq m_0)$,

$$L_j(x, D_x, D_t) = (D_t - \lambda_j^0(D_x))^2 + b_{j,1}(x, D_x)(D_t - \lambda_j^0(D_x)) + b_{j,2}(x, D_x),$$
$$b_{j,1}(x, D_x) \in OPS_{1,0}^1(\boldsymbol{R}^n),\quad b_{j,2}(x, D_x) \in OPS_{1,0}^0(\boldsymbol{R}^n),$$

où les opérateurs $b_{j,k}(x, D_x)$ $(k = 1, 2)$ sont uniquement déterminés par l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ modulo $OPS^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n)$;

(2) pour les racines caractéristiques simples $\lambda_j^0(\xi)$ $(m_0 + 1 \leq j \leq m - m_0)$,

$$L_j(x, D_x, D_t) = (D_t - \lambda_j^0(D_x)) + b_{j,1}(x, D_x),$$
$$b_{j,1}(x, D_x) \in OPS_{1,0}^1(\boldsymbol{R}^n),$$

où l'opérateur $b_{j,1}(x, D_x)$ est uniquement déterminé par l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ modulo $OPS^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n)$;

(3) l'opérateur $R(x, D_x, D_t)$ s'écrit comme suit:

$$R(x, D_x, D_t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(x, D_x) D_t^{m-k},\quad c_k(x, D_x) \in OPS^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n).$$

Proposition 3. *Sous les conditions* (A.2) *et* (A.3)′, *les conditions* (D.1) *à* (D.3) *sont équivalentes à la condition de bonne décomposition* (E).

En combinant la proposition 3 et les résultats de Takeuchi ([23], pp. 40-55), on obtient la démonstration du théorème 3.

Références

[1] J. Chazarain: Ann. Inst. Fourier, **24 (1)**, 173–202; 203-223 (1974).

[2] R. Courant and F. John: Introduction to Calculus and Analysis. vol. 1, Chapter 5, Appendix II, Interscience Publishers (1965).

[3] J.-C. De Paris: J. Math. Pures et Appl., **51**, 231–256; 465-488 (1972).

[4] R. A. DeVore and G. G. Lorentz: Constructive Approximation. Chapter 4, §5-§7, Springer-Verlag (1993).

[5] H. Flaschka and G. Strang: Adv. in Math., **6**, 347–379 (1971).

[6] D. Gourdin: C. R. Acad. Sci. Paris, **278**, Série A, 269-272 (1974).

[7] D. Gourdin, S. Ngnosse et J. Takeuchi: C. R. Acad. Sci. Paris, **324**, Série I, 1111–1116 (1997).

[8] H. Kumano-go: Pseudo-Differential Operators. MIT Press (1981).

[9] A. Lax: Comm. Pure Appl. Math., **9**, 135–169 (1956).

[10] P. D. Lax: Duke Math. J., **24**, 627–646 (1957).

[11] J. Leray et Y. Ohya: Deuxième Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle. Liège, CBRM, 105–144 (1964).

[12] E. E. Levi: Ann. Mat. Pura Appl., **(3) 16**, 161–201 (1909).

[13] S. Matsuura: Proc. Funct. Anal. and Related Topics. Tokyo, 1969, Univ. Tokyo Press. 171–176 (1970).

[14] S. Mizohata: On the Cauchy Problem. Notes and Reports in Math., no. 3, Acad. Press (1985).

[15] S. Mizohata and Y. Ohya: Publ. RIMS Kyoto Univ., **4**, 511–526 (1968-1969).

[16] S. Mizohata and Y. Ohya: Japanese J. Math., **40**, 63–104 (1971).

[17] Y. Ohya: J. Math. Soc. Japan, **16**, 268–286 (1964).

[18] Y. Ohya: Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **4 (4)**, 757–805 (1977).

[19] O. A. Oleinik: Comm. Pure Appl. Math., **23**, 569–586 (1970).

[20] I. G. Petrowsky: Bull. Univ. État Moscou, **1**, 1–74 (1938).

[21] M. J. D. Powell: Approximation Theory and Methods. Chapters 4 and 5, Cambridge Univ. Press (1981).

[22] J. Takeuchi: J. Math. Kyoto Univ., **25**, 459–472 (1985).

[23] J. Takeuchi: Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, Octobre 1995.

[24] J. Vaillant: J. Math. pures et appl., **47**, 1–40 (1968).

[25] B. L. van der Waerden: Algebra. vol. 1, Chapter 5, §5.3, Springer-Verlag, New York (1991).

[26] M. Yamaguti: Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., **32**, 121–151 (1959).