67. *Compacité linéaire et lemme de Hensel*

Par Mohamed TABAÂ

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Rabat, Maroc

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Oct. 12, 1993)

Soient A un anneau commutatif unitaire et $\mathfrak{R}$ son radical. L'anneau A est dit *hensélien* si, pour tout polynôme unitaire f de $A[X]$ et toute décomposition de son image $\hat{f}$ dans $(A/\mathfrak{R})[X]$ en produit $\hat{f} = GH$ de polynômes étrangers unitaires, il existe deux polynômes unitaires g, h de $A[X]$ d'images respectives G, H tels que $f = gh$. Les notations f, G, H garderont ce sens dans toute la suite.

Dans cette Note nous démontrons le

Théorème. Si A est un anneau linéairement compact pour la topologie discrète alors A est hensélien.

Démonstration. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des couples $(g + \mathfrak{a}A[X], h + \mathfrak{a}A[X])$ où g et h sont des polynômes unitaires de $A[X]$ tels que $\bar{g} = G$, $\bar{h} = H$, $f - gh \in \mathfrak{a}A[X]$ et $\mathfrak{a}$ est un idéal de A contenu dans $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{F} \neq \emptyset$; on l'ordonne par

$$\begin{matrix}(g_1 + \mathfrak{a}_1A[X], h_1 + \mathfrak{a}_1 A[X]) \leq \\ (g_2 + \mathfrak{a}_2A[X], h_2 + \mathfrak{a}_2A[X]) \Leftrightarrow\end{matrix} \begin{cases} g_2 + \mathfrak{a}_2A[X] \subseteq g_1 + \mathfrak{a}_1A[X] \\ \text{et} \\ h_2 + \mathfrak{a}_2A[X] \subseteq h_1 + \mathfrak{a}_1A[X] \end{cases}$$

Montrons que $\mathfrak{F}$ est inductif. Soit $(g_\lambda + \mathfrak{a}_\lambda A[X], h_\lambda + \mathfrak{a}_\lambda A[X])_\lambda$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathfrak{F}$; écrivons

$$g_\lambda = \sum_{i=0}^{i=r-1} a_{\lambda,i} X^i + X^r \text{ et } h_\lambda = \sum_{i=0}^{j=s-1} b_{\lambda,j} X^j + X^s,$$

où $r = \deg(G)$ et $s = \deg(H)$; donc pour $0 \leq i \leq r-1$ et $0 \leq j \leq s-1$, $(a_{\lambda,i} + \mathfrak{a}_\lambda)_\lambda$ et $(b_{\lambda,j} + \mathfrak{a}_\lambda)_\lambda$ sont des bases de filtre formées de variétés linéaires affines de A ; et comme A est linéairement compact pour la topologie discrète il existe $a_i \in A$ et $b_j \in A$ tels que $a_i - a_{\lambda,i} \in \mathfrak{a}_\lambda$ et $b_j - b_{\lambda,j} \in \mathfrak{a}_\lambda$ pour tout λ ; on pose

$$g = \sum_{i=0}^{i=r-1} a_iX^i + X^r,\ h = \sum_{j=0}^{j=s-1} b_jX^j + X^s \text{ et } \mathfrak{a} = \cap\, \mathfrak{a}_{\lambda j}.$$

$(g + \mathfrak{a}A[X], h + \mathfrak{a}A[X]) \in \mathfrak{F}$ car $f - gh = (f - g_\lambda h_\lambda) + h_\lambda(g_\lambda - g) + g(h_\lambda - h) \in \mathfrak{a}_\lambda A[X]$ pour tout λ, et il majore tous les éléments de la famille. Soit alors $(g_0 + \mathfrak{a}_0A[X], h_0 + \mathfrak{a}_0A[X])$ un élément maximal de $\mathfrak{F}$; montrons que $f = g_0h_0$; le polynôme $f - g_0h_0 \in \mathfrak{a}_0A[X]$, donc il s'écrit $f - g_0h_0 = \sum c_iX^i$, où $0 \leq i \leq n-1$, $n = \deg(f)$ et $c_i \in \mathfrak{a}_0$; d'autre part G et H sont étrangers et unitaires donc, pour tout $0 \leq i \leq n-1$, X^i s'écrit $X^i = u_ig_0 + v_ih_0 + w_i$, où u_i, v_i et w_i sont des polynômes de $A[X]$ tels que $\deg(v_i) \leq r-1$, $\deg(u_i) \leq s-1$ et $w_i \in \mathfrak{R}A[X]$; on pose, comme dans [3, (30.4)], $g' = g_0 + \sum c_iv_i$, $h' = h_0 + \sum c_iu_i$, et soit $\mathfrak{b} = \sum Ac_i$; le couple $(g' + \mathfrak{b}\mathfrak{R}A[X], h' + \mathfrak{b}\mathfrak{R}A[X]) \in \mathfrak{F}$, car $\deg(\sum c_iv_i) \leq r-1$, $\deg(\sum c_iu_i)$

$\leq s-1$ et $f-g'h'=\sum c_i w_i-(\sum c_i v_i)(\sum c_i u_i)\in \mathfrak{b}\mathfrak{R}A[X]$, et il majore $(g_0+\mathfrak{a}_0A[X],\ h_0+\mathfrak{a}_0A[X])$; donc $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\mathfrak{R}$, par suite, en vertu du lemme de Nakayama, on a $\mathfrak{b}=(0)$, puisque $\mathfrak{b}$ est de type fini ; d'où le résultat.

De ce théorème découle immédiatement le résultat connu pour les anneaux de valuation (cf. [1, chap. 6 §8 exer. 6], [2, Satz], [4, th. (31.12)]).

En désignant par Idem (A) l'ensemble des idempotents de A, on a le

Corollaire [6, prop. 13]. Si A est linéairement compact pour la topologie discrète alors l'application $\mathrm{Idem}(A)\to\mathrm{Idem}(A/\mathfrak{R})$ correspondant à l'homomorphisme canonique $A\to A/\mathfrak{R}$ est bijective.

Démonstration. Si $x\in\mathrm{Idem}(A/\mathfrak{R})$, on considère le polynôme $f=X^2-X$ de $A[X]$; son image $\hat{f}$ dans $(A/\mathfrak{R})[X]$ s'écrit $\bar{f}=(X-x)(X-\bar{1}+x)$; et puisque $(\bar{1}-2x)^2=\bar{1}$, les deux polynômes $(X-x)$ et $(X-\bar{1}+x)$ sont étrangers ; on en déduit, en vertu du théorème, qu'il existe $(a,\ b)\in A^2$ tel que $\bar{a}=x$ et $f=(X-a)(X-b)$; alors $a\in\mathrm{Idem}(A)$ et son image est x ; d'où la surjectivité. L'injectivité est démontrée dans [5, lemma 2].

Références

[1] N. Bourbaki: Algèbre Commutative. Masson (1985).

[2] P. Hartmann: Ein Beweis des Henselschen Lemmas für maximal bewertete Körper. Arch. Math., **37**, 163–168 (1981).

[3] M. Nagata: Local Rings. John Wiley (1962).

[4] S. Warner: Topological Fields. North-Holland Mathmatics Studies (1989).

[5] D. Zelinsky: Rings with ideal nuclei. Duke Math. J., **18**, 431–442 (1951).

[6] ——: Linearly compact modules and rings. Amer. J. Math., **75**, 79–90 (1953).