37. *Sur une inégalité de la théorie probabiliste des nombres*

Par Jean Loup MAUCLAIRE
The Institute for Statistical Mathematics, Tokyo

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 13, 1987)

1. Introduction. L'une des inégalités les plus utilisées en théorie probabiliste des nombres est l'inégalité dite de "Turan-Kubilius" ([2]). Sous sa forme originale aussi bien que sous sa forme duale, elle a joué un rôle important et continue à être utilisée avec succès. On se propose ici d'en fournir une extension à des semi-groupes plus généraux que ceux habituellement considérés.

2. Position du problème et résultats.

i) Soit Λ un semi-groupe normé par $N(\cdot)$, engendré par un ensemble P de "nombres premiers" p, sur lequel on fait les hypothèses suivantes:

H_1: $\sum_{\substack{N(a)\leq x\\ a\in\Lambda}} 1\leq Ax$, $\quad A$ absolue.

H_2: $\prod_{\substack{N(p^\nu)\leq x\\ p\in P}} (1+1/N(p))\leq B\log x$, $\quad x\geq 2$, $\quad B$ étant une constante absolue.

H_3: $\sum_{\substack{N(p^\nu)\leq x\\ p\in P}} \log N(p^\nu)\leq Cx$, $\quad C$ absolue.

Remarque 1. H_2 a pour conséquence que

$$\textstyle\sum_{N(p)\leq x} 1/(N(p))\leq \log\log x+\log B+O(1).$$

Pour tout $p\in P$, on définit une fonction $\varepsilon_{p^\nu}:\Lambda\to\{0,1\}$ par:

$$\varepsilon_{p^\nu}(a)=1 \text{ si } p^\nu \text{ divise } a \text{ exactement}, \qquad 0 \quad \text{sinon},$$

et on dit qu'une application $f:\Lambda\to\boldsymbol{C}$ est une fonction additive si pour tout a s'écrivant $a=\prod_{\varepsilon_{p^\nu}(a)=1} p^\nu$, on a:

$$f(a)=\sum_{\varepsilon_{p^\nu}(a)=1} f(p^\nu).$$

N.B.: Si $\varepsilon_{p^\nu}(a)=1$, on notera $\nu=v_p(a)$, analogue de la valuation p-adique usuelle.

ii) Le résultat est le suivant:

Théorème. *Λ satisfaisant aux hypothèses H_1, H_2, H_3, il existe une constante absolue C telle que:*

Pour toute fonction additive $f:\Lambda\to\boldsymbol{C}$, et pour tout x, on a:

$$\frac{1}{x}\sum_{N(a)\leq x}\left|f(a)-\sum_{N(p^\nu)\leq x}\frac{f(p^\nu)}{N(p^\nu)}\right|^2\leq C\sum_{p^\nu\leq x}\frac{|f(p^\nu)|^2}{N(p^\nu)}.$$

iii) Applications.

a) La forme duale de l'inégalité de Turan-Kubilius pouvant s'obtenir par la méthode développée par P. D. T. A. Elliott ([1]) à partir de l'inégalité ci-dessus, il est à souligner que cette relation de type "grand crible" demande très peu pour être obtenue.

b) Si Λ satisfait à:

$$H(M): \sum_{N(a)\leq x} 1 = Lx + o(x), \quad L>0, \quad x \to +\infty,$$
$$H(C): \sum_{N(p)\leq x} \log N(p) \leq Kx,$$

alors, le lemme C. 3 dans [3] page 112 donne

$$\sum_{N(p^\nu)\leq x} 1/(N(p^\nu)) = \log\log x + O(1).$$

Par conséquent, si $\omega(a)$ est définie par:

$$\omega(a) = \sum_{v_p(a)>0} 1,$$

on a une inégalité de Hardy-Ramanujan, i.e.: il existe K absolu (mais dépendant de Λ) tel que:

$$(1/x) \sum_{N(a)\leq x} |\omega(a) - \log\log x|^2 \leq K \log\log x.$$

Remarque 2. Le rôle de la fonction de dénombrement de Λ est de peu d'importance dans l'établissement de la relation. En outre, la méthode de démonstration est susceptible d'adaptation à des contextes plus généraux. Signalons que 3-b, où l'on se ramène à $f\geq 0$, peut être évité; on utilise à la place une inégalité classique.

3. Schéma de la démonstration. Afin de simplifier les notations, on donne la démonstration dans le cas $\Lambda = N^*$, en se référant cependant à H_1, H_2, H_3.

a) On fixe $x>0$. Alors, on définit E_x par:

$$E_x = \{n>0 \,|\, (\varepsilon_{p^\nu}(n)>0) \Rightarrow (p^\nu \leq x)\},$$

on pose: $\mu(p^\nu)=0$ si $p^\nu > x$,

$$= \frac{1}{p^\nu}\frac{1-1/p}{1-1/p^{r_p+1}}, \quad \text{où} \quad r_p = \left[\frac{\log x}{\log p}\right], \quad \text{si} \quad p^\nu < x.$$

[ ] étant ici le "crochet de Gauss". Par un calcul direct et sans subtilité, on établit le lemme suivant, qui correspond à l'indépendance statistique:

Lemme. *Pour tout p et q premiers, ν et ρ entiers>0, on a*:

i) $$\sum_{n\in E_x} \frac{\varepsilon_{p^\nu}(n) - \mu(p^\nu)}{n} = 0,$$

ii) $$\begin{aligned} \sum_{n\in E_x} (1/n)(\varepsilon_{p^\nu}(n) - \mu(p^\nu))(\varepsilon_{q^\rho}(n) - \mu(q^\rho)) &= 0 && \textit{si } p\neq q, \\ \mu(p^\nu)\cdot(1-\mu(p^\nu)) \sum_{n\in E_x} (1/n) & && \textit{si } p^\nu = q^\rho, \\ -\mu(p^\nu)\mu(p^\rho) \sum_{n\in E_x} (1/n) & && \textit{si } p=q \quad \textit{et } \nu\neq\rho. \end{aligned}$$

Remarque 3. H_2 nous donne que $\sum_{n\in E_x}(1/n) = O(\log x)$.

b) Une utilisation (immédiate) de l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakovsky montre que si l'inégalité est vraie pour $f\geq 0$, elle est vraie en général pour f à valeurs complexes. On suppose donc $f\geq 0$.

c) On pose $S(x) = \sum_{p^\nu\leq x} \mu(p^\nu) f(p^\nu)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\leq x} |f(n) - S(x)|^2 \log n, \quad \text{i.e.} \\ &= \sum_{n\leq x} \Big| \sum_{p^\nu\leq x} (f(p^\nu)\cdot\varepsilon_{p^\nu}(n)) - S(x)\Big|^2 \sum_{q^\rho\leq x} \varepsilon_{q^\rho}(n) \log q^\rho \\ &= \sum_{q^\rho\leq x} \log q^\rho \sum_{n\leq x} \Big| \sum_{p^\nu\leq x} \varepsilon_{q^\rho}(n)\varepsilon_{p^\nu}(n) f(p^\nu) - \varepsilon_{q^\rho}(n) S(x)\Big|^2 \\ &= \sum_{q^\rho\leq x} \log q^\rho \sum_{\substack{n=mq^\rho\leq x \\ (m,q)=1}} \Big|\varepsilon_{q^\rho}(mq^\rho) f(q^\rho) + \sum_{\substack{p^\nu\leq x \\ p\neq q}} \varepsilon_{p^\nu}(n) f(p^\nu) - S(x)\Big|^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{q^\rho \le x} \log q^\rho \sum_{\substack{m \le x/q^\rho \\ (m,q)=1}} |f(q^\rho) + \sum_{p^\nu \le x} \varepsilon_{p^\nu}(m) f(p^\nu) - S(x)|^2$$
$$\le \sum_{q^\rho \le x} \log q^\rho \sum_{\substack{m \le x/q^\rho \\ (m,q)=1}} (2[f(q^\rho)]^2 + 2[\sum_{p^\nu \le x} \varepsilon_{p^\nu}(m) f(p^\nu) - S(x)]^2).$$

On majore cela en otant la condition $(m, q)=1$, et par H_1, on peut écrire que

$$\sum_{q^\rho \le x} \log q^\rho \sum_{m \le x/q^\rho} 2 f(q^\rho)^2 \le 2 \sum_{q^\rho \le x} f(q^\rho)^2 \log q^\rho [A \times (x/q^\rho)]$$
$$\le 2Ax \log x \textstyle\sum_{q^\rho \le x} (f(q^\rho)^2)/q^\rho.$$

Pour ce qui est du second terme, on écrit que

$$\sum_{q^\rho \le x} \log q^\rho \cdot \sum_{m \le x/q^\rho} 2[\sum_{p^\nu \le x} \varepsilon_{p^\nu}(m) f(p^\nu) - S(x)]^2$$
$$= 2 \sum_{m \le x} [\sum_{p^\nu \le x} \varepsilon_{p^\nu}(m) f(p^\nu) - S(x)]^2 \cdot \sum_{q^\rho \le x/m} \log q^\rho$$
$$\le 2 \sum_{m \le x} [\sum_{p^\nu \le x} \varepsilon_{p^\nu}(m) f(p^\nu) - S(x)]^2 \cdot C(x/m), \qquad \text{par } H_3$$
$$\le 2Cx \sum_{m \in E_x} (1/m) [\sum_{p^\nu \le x} \varepsilon_{p^\nu}(m) f(p^\nu) - S(x)]^2$$

car $m \le x$ entraîne que $m \in E_x$, et l'on a

$$\sum_{m \in E_x} (1/m) [\sum_{p^\nu \le x} f(p^\nu) \varepsilon_{p^\nu}(m) - S(x)]^2$$
$$= \sum_{m \in E_x} (1/m) [\sum_{p^\nu \le x} (\varepsilon_{p^\nu}(m) - \mu(p^\nu)) f(p^\nu)]^2$$
$$= \sum_{\substack{p^\nu \le x \\ q^\rho \le x}} f(p^\nu) f(q^\rho) \sum_{m \in E_x} (1/m) (\varepsilon_{p^\nu}(m) - \mu(p^\nu)) (\varepsilon_{q^\rho}(m) - \mu(q^\rho))$$
$$= \sum_{p^\nu \le x} f(p^\nu)^2 \mu(p^\nu)(1 - \mu(\rho^\nu)) \sum_{n \in E_x} (1/n) + \sum_{\substack{p^\nu \le x \\ p^\rho \le x \\ \nu \ne \rho}} - f(p^\nu) f(p^\rho) \cdot \mu(p^\nu) \mu(p^\rho) \cdot \sum_{n \in E_x} (1/n),$$

par le lemme, et comme $f \ge 0$, le second terme est négatif, et l'on majore donc par

$$\sum_{p^\nu \le x} f(p^\nu)^2 \mu(p^\nu)(1 - \mu(p^\nu)) \sum_{n \le x} (1/n) \le \sum_{p^\nu \le x} f(p^\nu)^2 \mu(p^\nu) \cdot K' \log x \qquad \text{par } H_2$$

et comme $\mu(p^\nu) \le 1/p^\nu$, on majore encore par : $K' \log x \sum_{p^\nu \le x} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu}$, ce qui nous donne :

$\mathcal{C}$: il existe une constante absolue K telle que

$$A(x) = \sum_{n \le x} |f(n) - S(x)|^2 \log n \le Kx \log x \sum_{p^\nu \le x} (f(p^\nu)^2)/p^\nu.$$

d) On remarque alors que :

$$\sum_{n \le x^{1/2}} |f(n) - S(x)|^2 \le \sum_{n \le x^{1/2}} |f(n) - S(x^{1/2}) + S(x^{1/2}) - S(x)|^2$$
$$\le 2 \sum_{n \le x^{1/2}} |f(n) - S(x^{1/2})|^2 + 2 \sum_{n \le x^{1/2}} |S(x) - S(x^{1/2})|^2.$$

Or, tout d'abord, on a, pour un C_1 absolu :

$$2 \sum_{n \le x^{1/2}} |f(n) - S(x^{1/2})|^2 \le C_1 A(x^{1/2}), \qquad \text{et par } \mathcal{C}$$
$$\le C_1 K x^{1/2} \log x \sum_{p^\nu \le x^{1/2}} (f(p^\nu)^2)/p^\nu$$

et de plus :

$$|S(x) - S(x^{1/2})|^2 \le |\sum_{x^{1/2} \le p^\nu \le x} (f(p^\nu))/p^\nu|^2, \qquad \text{car } \mu(p^\nu) < 1/p^\nu$$
$$\le \sum_{x^{1/2} \le p^\nu \le x} (f(p^\nu)^2)/p^\nu \cdot \sum_{x^{1/2} \le p^\nu \le x} 1/p^\nu$$
$$\le C_2 \log x \cdot \sum_{x^{1/2} \le p^\nu \le x} (f(p^\nu)^2)/p^\nu, \qquad C_2 \text{ absolue,}$$

par la Remarque 1.

D'où l'on déduit, par H_1:

$$\sum_{n\le x}|f(n)-S(x)|^2\le C_3x^{1/2}\log x\sum_{p^\nu\le x}(f(p^\nu)^2)/p^\nu,\qquad C_3 \text{ absolue.}$$

e) On écrit que:

$$\sum_{n\le x}|f(n)-S(x)|^2\le\sum_{n\le x^{1/2}}|f(n)-S(x)|^2+\sum_{x^{1/2}\le n\le x}|f(n)-S(x)|^2(\log n/\log x^{1/2})$$
$$\le C_3x^{1/2}\log x\sum_{p^\nu\le x}(f(p^\nu)^2)/p^\nu+(2/\log x)A(x),\qquad \text{par d),}$$
$$\le C_4x\sum_{p^\nu\le x}(f(p^\nu)^2)/p^\nu,\qquad \text{par } C.$$

f) Pour avoir l'inégalité requise, on écrit que

$$\left|S(x)-\sum_{p^\nu\le x}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\right|^2=\left|\sum_{p^\nu\le x}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\cdot\left(\frac{1-1/p}{1-1/p^{r_p+1}}-1\right)\right|^2$$
$$=\left|\sum_{p^\nu\le x}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\times\left(\frac{1}{p}\times\frac{1-1/p^{r_p}}{(1-1/p^{r_p+1})}\right)\right|^2.$$

Or, $\dfrac{1-1/p^{r_p}}{(1-1/p)(1-1/p^{r_p+1})}\le\dfrac{1}{(1-1/p^2)}\le C_5$, où C_5 est absolu, et l'on majore par: $\left(\sum_{p^\nu\le x}\dfrac{f(p^\nu)}{p^{\nu+1}}\right)^2C_5^2$, que l'on majore, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakovsky, par:

$$\sum_{p^\nu\le x}(f(p^\nu)^2)/p^\nu\times\sum_{p^\nu\le x}(1/p^{\nu+2})\le C_6\cdot\sum_{p^\nu\le x}(f(p^\nu)^2)/p^\nu,$$

C_6 absolu, grâce à H_1.

g) Comme

$$\sum_{n\le x}[f(n)-\sum_{p^\nu\le x}(f(p^\nu))/p^\nu]^2=\sum_{n\le x}[(f(n)-S(x))+(S(x)-\sum_{p^\nu\le x}(f(p^\nu))/p^\nu)]^2$$
$$\le 2[\sum_{n\le x}|f(n)-S(x)|^2]+2([S(x)-\sum_{p^\nu\le x}(f(p^\nu))/p^\nu]^2\cdot\sum_{n\le x}1),$$

on conclut par e) et f).

Références

[1] P. D. T. A. Elliott: Probabilistic Number Theory, Vol. I et II. Springer Grundlehren, New-York, Heidelberg, Berlin (1979–1980).

[2] J. Kubilius: Probabilistic methods in the theory of numbers. Transl. Math. Monogr., 11, Amer. Math. Soc. (1964).

[3] J.-L. Mauclaire: Intégration et théorie des Nombres. Collection Travaux en Cours, Hermann, Paris (1986).