30. *Système Involutif d'Opérateurs Effectivement Hyperboliques*

Par Tatsuo NISHITANI
Department of Mathematics, College of General Education, Osaka University

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., April 13, 1987)

§ 1. **Introduction.** Dans cette note, nous étudions l'hyperbolicité du système d'opérateurs pseudo-différentiels (o.p.d. en abrégé) effectivement hyperboliques en involution dans le sense qui sera précisé dans la suite. Soit U une partie ouverte dans $\boldsymbol{R}^{d+1}$. Notons par T^*U le fibré cotangent de U et par $(x', \xi')=(x_1, \cdots, x_d, \xi_1, \cdots, \xi_d)$ des coordonnées naturelles sur T^*U. Soit I un intervalle ouvert dans $\boldsymbol{R}$ et posons $\Omega=I\times U$. On note par $(x, \xi)=(x_0, x', \xi_0, \xi')$ des coordonnées naturelles sur $T^*\Omega$ et on pose

$$D_j=-i(\partial/\partial x_j), \quad j=0, 1, \cdots, d, \quad D=(D_0, D'), \quad D'=(D_1, \cdots, D_d).$$

Soit

$$L(x, D)=\sum_{j=0}^{2} A_j(x, D')D_0^{2-j}, \qquad A_0(x, D')=I_m,$$

un opérateur matriciel du second ordre où $A_j(x, D')$ est la matrice carrée à m colonnes d'o.p.ds. classiques d'ordre j définis près de $(\bar{x}, \bar{\xi}')\in I\times(T^*U\backslash 0)$. Ici on a noté par I_m la matrice unité d'ordre m. On note par $L_2(x, \xi)$ le symbole principal de $L(x, D)$ et on suppose que $L_2(x, \xi)$ est de diagonal,

$$L_2(x, \xi)=\mathrm{diag}\,(q_1(x, \xi), \cdots, q_m(x, \xi)). \tag{1.1}$$

Nous supposons que $L_2(x, \cdot)$ est hyperbolique par rapport à dx_0 près de $(\bar{x}, \bar{\xi}')$, c'est-à-dire que l'équation en ξ_0,

$$p(x, \xi_0, \xi')=0, \qquad p(x, \xi)=\text{dét}\,L_2(x, \xi), \tag{1.2}$$

admet $2m$ racines réelles pour tout (x, ξ') près de $(\bar{x}, \bar{\xi}')$. Ici $\text{dét}\,L_2(x, \xi)$ désigne le déterminant de $L_2(x, \xi)$. Dans toute la suite nous supposons que $\rho=(\bar{x}, \bar{\xi})=(\bar{x}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}')$ est une caractéristique double pour tous $q_i(x, \xi)$;

$$q_i(\rho)=dq_i(\rho)=0, \qquad i\in J=\{1, 2, \cdots, m\}.$$

On désigne par $p_\rho(x, \xi)$ la partie homogène de degré le plus bas dans le développement de Taylor de $p(x, \xi)$ en ρ. On note par $\Gamma(p_\rho, dx_0)$ le cône d'hyperbolicité de p_ρ;

$$\Gamma(p_\rho, dx_0)=\text{la composante de } dx_0 \text{ dans } \{X\in T_\rho(T^*\Omega)\,;\, p_\rho(X)\neq 0\}.$$

On a evidemment

$$\Gamma(p_\rho, dx_0)=\bigcap_{j\in J}\Gamma(q_{j\rho}, dx_0).$$

Puis on désigne par $C(p_\rho, dx_0)$ le cône de la propagation de p_ρ;

$$C(p_\rho, dx_0)=\{X\in T_\rho(T^*\Omega)\,;\, \sigma(X, Y)\leqq 0, \text{ pour tout } Y\in\Gamma(p_\rho, dx_0)\},$$

où σ est la 2-forme symplectique naturelle sur $T^*\Omega$. Soient $\{H_i\}$ $(i=1, \cdots, k)$ un ensemble fini des hyperplans dans $T_\rho(T^*\Omega)$. Nous dirons que $\{H_i\}$ $(i=1, \cdots, k)$ sont en involution si on a

$$H_i^\sigma \subset \bigcap_{j=1}^{k} H_j, \quad \text{pour tout} \quad i=1,2,\cdots,k,$$

où H_i^σ désigne l'espace orthogonal de H_i par rapport à σ. Nous introduisons l'hypothèse suivante; il existe des hyperplans $\{H_j\}$ $(j \in J)$ qui sont en involution

(1.3) tel qu'on ait

$$C(p_\rho, dx_0) \cap H_j = \{0\}, \qquad H_j \supset \operatorname{Ker} \operatorname{Hess} q_j(\rho),\ \xi_0\text{-axe (pour tout } j \in J),$$

où $\operatorname{Ker}\operatorname{Hess} q_j(\rho)$ est le noyau du Hessien de q_j en ρ. On peut exprimer l'hypothèse (1.3) en d'autres termes; il existe un espace isotropique $V \subset T_\rho(T^*\Omega)$ (i.e. $V \subset V^\sigma$)

(1.3)′ tel que

$$\Gamma(p_\rho, dx_0) \cap (\operatorname{Ker}\operatorname{Hess} q_j(\rho))^\sigma \cap V \cap T_\rho(T^*\Omega|_{x_0=\bar{x}_0}) \neq \emptyset \quad \text{pour tout } j \in J.$$

Remarque 1.1. D'après le Corollaire 1.4.7 de [1], l'hypothèse (1.3)′ entraîne que tous $q_j(x,\xi)$ sont effectivement hyperboliques en ρ. De plus si $m=1$, la condition (1.3)′ est équivalente à ce que $p(x,\xi)=q_1(x,\xi)$ est effectivement hyperbolique en ρ (cf. Lemme 3.2 de [3]).

Remarque 1.2. Nous notons que l'hypothèse (1.3) est invariante sous les changements des coordonnées symplectiques homogènes près de ρ conservant les plans initiaux $x_0=\text{const.}$

Sous ces hypothèses on a le

Théorème 1.1. *Supposons que les hypothèse* (1.1)–(1.3) *soient vérifiées. Alors il existe une paramétrix en* $(\bar{x}', \bar{\xi}')$ *de* $L(x,D)$ *à vitesse finie de la propagation du front d'onde* (*avec n'importe quels termes d'ordre inférieur*).

Pour la définition d'une paramétrix en un point à vitesse finie de la propagation du front d'onde et ses propriétés, voir [4]. Puis nous donnons un résultat de la propagation des singularités. Dans la suite H_ϕ désigne le champ Hamiltonien de ϕ.

Théorème 1.2. *Supposons que* (1.1)–(1.3) *soient satisfaites. Soit* $\phi(x,\xi)$ *une fonction homogène de degré* 0 *en* ξ *à valeur réelle définie près de* ρ *telle que*

$$\phi(\rho)=0, \qquad -H_\phi(\rho) \in \Gamma(p_\rho, dx_0),$$

et soit ω *un voisinage conique de* ρ *suffisamment petit. Alors il résulte de*

$$\omega \cap \{\phi<0\} \cap WF(u) = \emptyset, \qquad \rho \notin WF(Lu),$$

que

$$\rho \notin WF(u),$$

pour des distributions vectorielles u.

§2. Deux exemples. Quand nous étudions l'hyperbolicité forte d'un système différentiel du premier ordre, il sera important de considérer le système dont le symbole principal est de la somme directe des 2×2 matrices (cf. Remarque 2.2 de [5]). Soit

$$L(x,D) = I_{2m} D_0 + A_1(x, D'),$$

un opérateur matriciel du premier ordre où $A_1(x,D')$ est la $2m$ fois $2m$ matrice d'o.p.ds. classiques d'ordre 1 définis près de $(\bar{x}, \bar{\xi}')$. Notons par $L_1(x,\xi)$ le symbole principal de $L(x,D)$ et supposons que $L_1(x,\xi)$ soit de la somme directe des 2×2 matrices $C_j(x,\xi)$,

(2.1) $$L_1(x,\xi)=C_1(x,\xi)\oplus C_2(x,\xi)\oplus\cdots\oplus C_m(x,\xi).$$

Nous nous intéresserons au cas où $\rho=(\bar{x},\bar{\xi})$ est une caractéristique d'ordre $2m$ de $L_1(x,\xi)$, c'est-à-dire que

(2.2) $$q_j(\rho)=dq_j(\rho)=0,\qquad j\in J=\{1,2,\cdots,m\},$$

avec $q_j(x,\xi)=\text{dét}\,C_j(x,\xi)$. Si $L(x,D)$ est l'opérateur différentiel et fortement hyperbolique en $\bar{x}$ par rapport à x_0, d'après le Corollaire 2.1 de [5], on sait que $C_j(\rho)=0$ (matrice nulle) ou bien $q_j(x,\xi)$ est effectivement hyperbolique en ρ. Suivant cette observation nous considérons le cas où tous $q_j(x,\xi)$ sont effectivement hyperboliques en ρ. En désignons par ${}^{co}L_1(x,\xi)$ la matrice des cofacteurs de $L_1(x,\xi)$, on est amené à considérer le système du second ordre $L(x,D){}^{co}L_1(x,D)$ dont le symbole principal $\tilde{L}_2(x,\xi)$ est;

$$\tilde{L}_2(x,\xi)=\text{diag}\,(q_1(x,\xi),\ q_1(x,\xi),\ \cdots,\ q_m(x,\xi),\ q_m(x,\xi)).$$

En notant $p(x,\xi)=\text{dét}\,\tilde{L}_2(x,\xi)$ on a

$$\Gamma(p_\rho,dx_0)=\bigcap_{j=1}^{m}\Gamma(q_{j\rho},dx_0).$$

Alors il résulte des Théorèmes 1.1 et 1.2:

Théorème 2.1. *Supposons que* (2.1), (2.2) *et* (1.3) *soient satisfaites. Alors il existe une paramétrix en* $(\bar{x}',\bar{\xi}')$ *de* $L(x,D)$ *à vitesse finie de la propagation du front d'onde. De plus pour la propagation des singularités, on a le même résultat que Théorème* 1.2.

Comme deuxième exemple nous étudions l'opérateur scalaire d'ordre m. Soit

$$P(x,D)=D_0^m+\sum_{j=1}^{m}A_j(x,D')D_0^{m-j},$$

un opérateur différentiel en D_0 d'ordre m ayant pour des coefficients $A_j(x,D')$ d'o.p.ds. classiques d'ordre j définis près de $(\bar{x},\bar{\xi}')\in I\times(T^*U\backslash 0)$. On note par $p(x,\xi)$ le symbole principal de $P(x,D)$ et on suppose que $p(x,\xi)$ soit le produit des symboles homogènes de degré 1,

(2.3) $$p(x,\xi)=\prod_{j=1}^{m}q_j(x,\xi),\qquad q_j(x,\xi)=\xi_0-a_j(x,\xi'),$$

où $a_j(x,\xi')$ sont les symboles d'o.p.ds. réels homogènes de degré 1. On s'intéresse au cas où $\rho=(\bar{x},\bar{\xi})=(\bar{x},\bar{\xi}_0,\bar{\xi}')$ est une caractéristique pour tous $q_j(x,\xi)$; $q_j(\rho)=0$, $j\in J=\{1,2,\cdots,m\}$.

Maintenant nous introduisons l'hypothèse suivante,

(2.4) $$\begin{aligned}&\{q_i,q_j\}(\rho)\neq 0, &&\text{pour tout}\quad i,j\in J,\ i\neq j,\\ &\{q_i,q_j\}(\rho)+\{q_j,q_k\}(\rho)+\{q_k,q_i\}(\rho)=0, &&\text{pour tout}\quad i,j,k\in J,\end{aligned}$$

où $\{q_i,q_j\}$ désigne la parenthèse de Poisson de q_i et q_j. On note par $P(x,\xi)$ le symbole entier de $P(x,D)$. Donc on a l'expression suivante

$$P(x,\xi)=p(x,\xi)+p_{m-1}(x,\xi)+\cdots+p_i(x,\xi)+\cdots,$$

où $p_i(x,\xi)$ est la partie homogène de degré i de $P(x,\xi)$. Soit K un sous ensemble de J. Posons

$$q_K(x,\xi)=\prod_{j\in K}q_j(x,\xi),$$

et notons par $|K|$ le nombre cardinal de K. Alors l'hypothèse sur les termes d'ordre inférieur s'énonce que $p_{m-j}(x, \xi)$ s'écrive

$$(2.5)\quad p_{m-j}(x, \xi)=\sum_{|K|=m-2j, K\subset J} c_K^j(x, \xi) q_K(x, \xi) \quad \text{pour} \quad j=1, 2, \cdots, [(m-1)/2],$$

près de ρ avec des symboles $c_K^j(x, \xi)$ homogènes de degré j qui sont polynômes en ξ_0 où $[k]$ désigne la partie entière de k (cf. Théorème 4.1 de [2]). Alors on a

Théorème 2.2. *Supposons que* (2.3), (2.4) *et* (2.5) *soient vérifiées. Alors il existe une paramétrix en* $(\bar{x}', \bar{\xi}')$ *de* $P(x, D)$ *à vitesse finie de la propagation du front d'onde. De plus on a la même conclusion que Théorème* 1.2.

Pour appliquer le Théorème 1.1 à cet opérateur $P(x, D)$, nous remarquons que

Lemme 2.1. *L'hypothèse* (2.4) *est équivalente à la suivante ;*

(2.6) *il existe des hyperplans* $\{H_{ij}\}$ $(i \neq j,\ i, j \in J)$ *qui sont en involution tels que*
$C(p_\rho, dx_0) \cap H_{ij}=\{0\}, \quad H_{ij} \supset \{dq_i(\rho)=dq_j(\rho)=0\}, \quad \xi_0$*-axe, pour tout* $i, j \in J,\ i \neq j$.

Il est facile de voir que sous l'hypothèse (2.5), l'existence d'une paramétrix à vitesse finie de la propagation du front d'onde de $P(x, D)$ est réduit à celui d'un système du second ordre dont le symbole principal est une matrice diagonale. De plus on peut supposer que les éléments du symbole principal soient constitués par $q_i(x, \xi) q_j(x, \xi)$ $(i \neq j,\ i, j \in J)$ sauf répétitions. Vu le Lemme 2.1 on peut appliquer le Théorème 1.1 au système et on a le résultat.

Références

[1] L. Hörmander: The Cauchy problem for differential equations with double characteristics. J. Analyse Math., **32**, 118–196 (1977).

[2] V. Ja. Ivrii et V. M. Petkov: Necessary conditions for the Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations to be well posed. Russian Math. Surveys, **29**, 1–70 (1974).

[3] T. Nishitani: Microlocal energy estimates for hyperbolic operators with double characteristics. Taniguchi Sym. HERT, Katata (1984).

[4] ——: Système effectivement hyperbolique. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes (J. Vaillant), 1984–1985.

[5] ——: On strong hyperbolicity of systems. Proceeding of Hyperbolic equations and related topics, Padova (1985).