# 4. *Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules).* III

Par Marc KRASNER*) et Mirjana VUKOVIĆ**)

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Jan. 12, 1987)

**Anneaux paragraduées.** Soient $(A\,;x+y,\ xy)$ un anneau (pas forcément associatif), et $\pi:\varDelta\rightarrow Sg(A)$ une paragraduation de son groupe additif $(A\,;x+y)$. L'application $\pi$ est dite une *paragraduation d'anneau* de $(A\,;x+y,\ xy)$ si, pour tous $\xi,\eta\in\varDelta$ existe un $\zeta$ tel que $A_\xi A_\eta\subseteq A_\zeta$ (où $A_\delta=\pi\cdot\delta$) et l'anneau $(A\,;x+y,\ xy)$ muni de $\pi$ est dit un *anneau paragradué*. Une application $(\xi,\eta)\rightarrow\xi\eta$ de $\varDelta\times\varDelta$ dans $\varDelta$ est dite un *multiplication* (ou *composition*) des grades (pour $\pi$) si :

1) pour tous $\zeta,\eta$, on a $A_\xi A_\eta\subseteq A_{\xi\eta}$ ;

2) pour tous $\xi,\xi',\eta,\eta'\in\varDelta$, $\xi\leqslant\xi'$ et $\eta\leqslant\eta'$ impliquent $\xi\eta\leqslant\xi'\eta'$.

La multiplication $\xi\eta=\mathrm{Sup}\,\{\delta(xy)\,;x,y\in H,\ \delta(x)=\xi,\ \delta(y)=\eta\}$, où $H$ est la partie homogène de $(A\,;x+y)$ pour $\pi$ est définie et satisfait aux conditions 1) et 2). Elle s'appelle la multiplication *minimale* des grades (pour $\pi$). Une paragraduation $\pi$ de $(A\,;x+y,\ xy)$ est dite *propre* si elle l'est en tant que paragraduation de $(A\,;x+y)$ et si elle est munie de la multiplication minimale de ses grades. Si $\pi$ est une extragraduation de $(A\,;x+y)$ elle en est dite une de $(A\,;x+y,\ xy)$, qui est dit un *anneau extragradué*.

On montre que l'existence, pour tous $\xi,\eta\in\varDelta$, d'un $\zeta\in\varDelta$ tel que $A_\xi A_\eta\subseteq A_\zeta$ équivaut à deux conditions :

(I) $H\subseteq H$ ;

(II) Si $x,x',y,y'\in H$ sont tels que $x+x',\ y+y'\in H$, on a $xy+x'y'\in H$. (Contrairement au cas des anneaux gradués, (II) n'est pas une conséquence de (I)). Donc, du point de vue semi-homogène, le couple $(A=(A\,;x+y,\ xy),\ H\subseteq A)$ est un anneau paragradué ssi, en posant $H(x)=\{y\in H\,;x+y\in H\}$ $(x\in H)$, on a :

1°) Si $a\in H$, $A(a)=\{x\in H\,;H(x)\supseteq H(a)\}$ est un sous-groupe de $(A\,;x+y)$ ;

2°) Si $A\subseteq H$ est tel que $A+A\subseteq H$, il existe un sous-groupe $g\subseteq H$ de $(A\,;x+y)$, qui est fortement saturé et tel que $A\subseteq g$ ;

3°) $H$ engendre le groupe *abélien* $(A\,;x+y)$ avec le système des relations $x+y=z$, où $x,y,z\in H$ et on a $x+y=z$ dans $(A\,;x+y)$ ;

4°) $H^2\subseteq H$ ;

5°) Si $x,x',\ y,y'\in H$, $x+x'\in H$ et $y+y'\in H$ impliquent $xy+x'y'\in H$.

Il est clair quand $(G,H)$ est un anneau extragradué.

---

*) Professeur émérite de l'Université de Paris VI. Décédé le 13 mai 1985 à l'âge de 73 ans.

**) Prirodno-matematički fakultet (Odsjek za matematiku) Vojvode Putnika 43/IV, 71000 Sarajevo, Jougoslavie.

L'analogue homogène, dans le cadre des anneaux, des quasi-groupoïdes (appelé quasi-annéïde non-associatif) est la structure $(H; x+y, xy)$ avec l'addition partielle $x+y$ et la multiplication partout définie $xy$ satisfaisant aux axiomes suivants. On pose, si $x \in H$, $H(x)=\{y \in H; x \sharp y\}$. Alors, ces axiomes sont:

1°) Il existe un $0 \in H$ tel que $H(0)=H$ et que, pour tout $x \in H$, on ait $0+x=x$;

2°) Si $a \in H$, $x+y$ est partout défini sur $g(a)=\{x \in H; H(x) \supseteq H(a)\}$ et $g(a)$ est un groupe abélien par rapport à $x+y$;

3°) Si $A \subseteq H$ est tel que, pour tous $x, y \in A$, on ait $x \sharp y$, il existe un sous-groupe fortement saturé $g$ de $(H; x+y)$ (autrement dit, $x+y$ est partout défini sur $g$, $g$ est un groupe par rapport à $x+y$ et $x \in g$ implique $g(x) \subseteq g$), tel que $A \subseteq g$;

4°) $x \sharp x'$ et $y \sharp y'$ impliquent $xy \sharp x'y'$.

**Remarque.** 1) En particulier, $x \sharp y$ implique $zx \sharp zy$ et $xz \sharp yz$.

5°) Si $x \sharp y$, on a $z(x+y)=zx+zy$ et $(x+y)z=xz+yz$.

On prouve que si 0 designe la fonction-morphisante $u(x, y)=0$ du quasi-groupoïde additif $(H; x+y)$ de $(H; x+y, xy)$, la multiplication $xy$ de $H$ induit canoniquement une multiplication sur le groupe abélien additif $F(H)/N_0$ $(=Z(H)/N^*$, où $Z(H)$ est le $Z$-module libre engendré par $H$ et $N^*$ en est le sous-groupe engendré par les $x+y-z$, où $x, y, z \in H$, $x \sharp y$ et $x+y=z$ dans $H$), qui en fait un anneau. Donc, $(H; x+y, xy)$ est la partie homogène d'un anneau paragradué ssi $(H; x+y)$ est commutativement linéarisable (car, dans ce cas, la multiplication canonique de $F(H)/N_0$ s'obtient en prolongeant celle de $H$ par distributivité. Dans ce cas, $(H; x+y, xy)$ est dit un *paranneïde non-associatif*. Il est une telle partie d'un anneau extragradué, auquel cas il est dit un *extranneïde non-associatif*, si, les axiomes "multiplicatifs" 4°) et 5°) restant les mêmes, $(H; x+y)$ est un 0-extragroupoïde. Si la multiplication $xy$ est associative, $(H; x+y, xy)$ satisfaisant aux axiomes 1°)–5°) est appelé un *quasi-annéïde* et il est dit un *paranneïde* resp. *extranneïde* si $(H; x+y)$ est un 0-paragroupoïde resp. 0-extragroupoïde.

Un quasi-annéïde est dit un quasi-corpoïde s'il est un presque-groupe multiplicatif. Mais, les corpoïdes sont les seuls quasi-corpoïdes.

**Modules paragradués.** Soient $A=(A; x+y, xy)$ un anneau et $M=(M; x+y)$ un $A$-module, dont soit $ax$ $(a \in A, x \in M)$ la multiplication externe. Soient $\pi: \Delta \to Sg((A; x+y))$ et $\Pi: D \to Sg(M)$ les paragraduations et $H, N$ les parties homogènes de l'anneau $A$ resp. du groupe additif $M$. Le couple $(\pi, \Pi)$ est dit une *paragraduation de l'A-module M* si, pour tous $\xi \in \Delta$ et $s \in D$ existe un $t \in D$ tel que $A_\xi M_s \subseteq M_t$ (on pose $A_\delta=\pi \cdot \delta$, $M_d=\Pi \cdot d$ et si $a \in H$, $x \in N$, le grade de $a$ par rapport à $\pi$ sera noté $\delta(a)$, et celui de $x$ par rapport à $\Pi$ sera noté $d(x)$). Une multiplication (externe) des grades $(\xi, s) \to \xi s$ est une application $\Delta \times D \to D$ telle que $A_\xi M_s \subseteq M_{\xi s}$ et que $s \leqslant s'$ et $\xi \leqslant \xi'$ impliquent $\xi s \leqslant \xi' s'$.

La multiplication $\xi s = \operatorname{Sup}\{d(ax) ; a \in H, x \in N, \delta(a)=\xi, d(x)=s\}$ est dite *minimale* et $(\pi, \Pi, \xi s)$ est dite une paragraduation *propre* du $A$-module $M$ si $\pi$ et $\Pi$ sont propres et $\xi s$ est minimale. Si $\Pi$ est une extragraduation de $(M ; x+y)$, le module paragradué considéré est dit un *module extragradué*. Si $A$ est un anneau paragradué unitaire (autrement dit, comporte une unité homogène 1), le module gradué considéré est dit *unitaire* si, pour tout $x \in M$, on a $1x=x$.

Du point de vue semi-homogène, la structure $((A, H), (M, N), ax)$, où $(A, H)$ est un anneau paragradué, $(M, N)$ est un groupe commutatif paragradué et $ax$ une multiplication externe $A \times M \rightarrow M$, est un module paragradué ssi :

1°) $HN \subseteq N$ ;

2°) pour tous $a, a' \in H$ et $x, x' \in N$, $a+a' \in H$ et $x+x' \in N$ impliquent $ax+a'x' \in N$.

Le module paragradué est dit *extragradué* si $(M, N)$ est un groupe extragradué.

Du point de vue homogène, une structure $((H ; x+y, xy), (N ; x+y), ax)$, où $(H ; x+y, xy)$ est un quasi-annéïde, $(N ; x+y)$ est un quasi-groupoïde commutatif et $ax$ est une multiplication externe $H \times N \rightarrow N$, est dite un quasi-moduloïde si $ax$ satisfait aux axiomes :

1°) $(ab)x = a(bx)$ $(a, b \in H, x \in N)$ ;

2°) $a \sharp b$ et $x \sharp y$ $(a, b \in H ; x, y \in N)$ implique $ax \sharp by$ (en particulier, $a \sharp b$ implique $ax \sharp bx$ et $x \sharp y$ implique $ax \sharp ay$) ;

3°) $a \sharp b$ implique $(a+b)x = ax+bx$ ;

4°) $x \sharp y$ implique $a(x+y) = ax+ay$.

Si $(H ; x+y, xy)$ est un paragroupoïde et si $(N ; x+y)$ est un 0-paragroupoïde resp. 0-extragroupoïde commutatifs, le quasi-moduloïde $((H ; x+y, xy), (N ; x+y) ; ax)$ est dit un paramoduloïde rosp. extramoduloïde. Dans ce cas, si $(A ; x+y, xy)$ resp. $(M ; x+y)$ est le linéarisé de $(H ; x+y, xy)$ resp. le 0-linéarisé de $(N ; x+y)$, $ay$ s'étend par distributivité en une application $A \times M \rightarrow M$, qui fait de $(M ; x+y)$ un $(A ; x+y, xy)$-module paragradué resp. extragradué.

## Références

[1] M. Chadeyras: Essai d'une théorie noetherienne homogène pour les anneaux commutatifs dont la graduation est aussi générale que possible. Suppl. Bull. Soc. Math. France, Mémoire, **22**, 1–143 (1970).

[2] M. Krasner: Une généralisation de la notion de corps-corpoïde. Un corpoïde remarquable de la théorie des corps valués. Comptes Rendus, **219**, 345–347 (1944).

[3] ——: Congruences multiplicatives. Squelettes et corpoïdes. Séminaire Krasner, exp. 4, 1953–1954., vol. 1, Sécr. Math. Fac. Sc. Paris, 39 pp.

[4] ——: Anneaux gradués généraux. Colloque d'algèbre, Rennes, 209–308 (1980).

[5] ——: Le vieux qui est neuf. Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées, t. XXVII, 443–472 (1982).