111. *Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules)*. II

Par Marc KRASNER[*)] et Mirjana VUKOVIĆ[**)]

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Dec. 12, 1986)

3. Point de vue homogène. On considère les parties homogènes H des groupes G avec la composition partielle xy induite par celle de G (la composabilité des $x, y \in H$ est notée $x \sharp y$ et équivaut à $xy \in H$ dans G). On appelera une structure $(H; xy)$, où xy est une composition partielle, *para-groupoïde* si elle est de ce type. Soit $H(x)=\{y \in H; x \sharp y\}$. Alors, en traduisant les parties des axiomes 1°)–3°), qui ne font intervenir que les éléments de H et leur composition *partielle* dans H, on obtient, d'abord, les conditions (I*)–(III*) suivantes, pour que $(H; xy)$ soit un paragroupoïde :

(I*) Il existe $1 \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, on ait $1 \sharp x$ et $1x=x$.

(II*) a) Si $x \in H$, la composition xy est partout définie sur $g(u)=\{v \in H; H(v) \supseteq H(u)\}$, et $g(u)$ est un groupe par rapport à cette composition ;

b) Si $x \sharp y$, on a $y \sharp x$, et il existe un $z=z(x, y) \in H$ tel que $z \sharp xy$, $yx=z(x, y)xy$ et $H(z) \supseteq H(x) \cup H(y)$.

Remarques. 1) Un $g \subseteq H$ est dit un *sous-groupe* de H si xy y est partout définie et g est un groupe par rapport à cette composition ;

2) Un sous-groupe g de H est dit *fortement saturé* si $x \in g$ implique $g(x) \subseteq g$.

(III*) Si $A \subseteq H$ est tel que, pour tous $x, y \in A$, on ait $x \sharp y$, il existe un sous-groupe fortement saturé g de H tel que $A \subseteq g$.

Les structures $(H; xy)$ satisfaisant aux axiomes (I*)–(III*) s'appellent *quasi-groupoïdes*. Ce $(H; xy)$ est, en fait, une amalgame de groupes, à savoir celui de tous les sous-groupes fortement saturés de H. La structure $(H; xy)$ est un paragroupoïde ssi cette amalgame de groupe peut être immergé d'une manière invariante dans un groupe G (c'est-à-dire d'une manière telle que l'image de tout groupe de l'amalgame devienne un sous-groupe invariant de G) et de telle manière que G soit engendré par H juste avec le système R précédemment décrit de relations, réunion de l'ensemble des relations H-internes

$$\{xyz^{-1}=1 ; x, y, z \in H ; x \sharp y, xy=z \text{ dans } H\}$$

et celui des relations gauches de commutation

$$\{z(x, y)xyx^{-1}y^{-1}=1 ; x, y \in H, yx=z(x, y)xy \text{ dans } G\}$$

obtenues après l'immersion. Pour étudier l'ensemble de telles immersions de $(H; xy)$ (à $(H; xy)$-isomorphie), on considère les fonctions $u: H \times H \to H$

*) Professeur émérite de l'Université de Paris VI. Décédé le 13 mai 1985 à l'âge de 73 ans.

**) Prirodno-matematički fakultet (Odsjek za matematiku) Vojvode Putnika 43/IV, 71000 Sarajevo, Jougoslavie.

qui sont, en quelque sorte, candidats pour que $u(x, y)$ devienne, après une telle immersion invariante convenable, le commutateur $yxy^{-1}x^{-1}$ des y et x. Pour que u puisse prétendre à ce rôle, il faut que

a) $H(u(x, y)) \supseteq H(x) \cup H(y)$ et

b) $u(x, y) = z(x, y)$ si $x \sharp y$ (où $z(x, y)$ a été défini par l'axiome (II*) b)).

Une telle fonction est dite *morphisante*. Si $F = F(H)$ est le groupe libre engendré par H, soit N_u son sous-groupe invariant, engendré par ses éléments xyz^{-1} ($x \sharp y$ et $xy = z$ dans $(H; xy)$) et $u(x, y)xyx^{-1}y^{-1}$ ($x, y \in H$). Alors, $\eta_u : x \to xN_u$ est une application de H dans F/N_u, et on montre facilement que $(H; xy)$, en tant qu'amalgame de ses sous-groupes fortement saturés, est immersible dans un groupe d'une telle manière invariante que, pour tous $x, y \in H$, on ait $yxy^{-1}x^{-1} = u(x, y)$ ssi η_u est une telle immersion de H dans F/N_u (dans ce cas, H engendre F/N_u précisément avec le système de relations $R = R_u = \{v = 1 ; v \in N_u\}$). On montre, en employant, en particulier, l'axiome (II*) que ceci a lieu ssi :

α) pour tout $x \in H$, $xN_u \cap H = \{x\}$;

β) pour tous $x, y \in H$, $xyN_u \cap H \neq \emptyset$ implique $x \sharp y$ dans $(H; xy)$.

Si une fonction morphisante satisfait à ces conditions, elle est dite une fonction *linéarisante*, et le groupe paragradué $(F/N_u ; H)$ (considéré à $(H; xy)$-isomorphie et équivalence près) est dit le *u-linéarisé* de $(H; xy)$ et est noté $(\overline{H; xy, u})$ (et $(H; xy)$ est dit *u-linéarisable*). Un quasi-groupoïde peut n'avoir aucune fonction linéarisante, auquel cas il n'est pas un paragroupoïde, et aussi il peut en avoir plusieurs, auquel cas il est un paragroupoïde "de plusieurs manières". Si $(H; xy)$ est un quasi-groupoïde commutatif (autrement dit, tel que si $x \sharp y$ (ce qui implique $y \sharp x$) on ait $yx = xy$) il est immersible, en tant qu'amalgame de ses sous-groupes fortement saturés, dans un groupe commutatif (auquel cas $(H; xy)$ est dit *commutativement linéarisable*) ssi $u(x, y) = 1$ (on notera cette fonction morphisante 1, et on la notera 0 si xy est écrite additivement : $x + y$) est une fonction linéarisante. Donc, si un quasi-groupoïde commutatif est "commutativement paragroupoïde" il l'est d'une seule manière, le groupe paragradué correspondant ne pouvant être que $(\overline{H; xy, 1})$.

L'étude des quasi-groupoïdes (même quand ils sont des paragroupoïdes) peut se faire directement, sans faire intervenir les groupes paragradués englobant quand ils existent. L'existence ou la non-existence des linéarisés n'influe guère sur la possibilité et la manière de définir les structures dérivées, ni sur les propriétés de ces structures. Les quasi-groupoïdes sont, ainsi, des structures plus générale que les groupes paragradués. Si u est une fonction morphisante d'un quasi-groupoïde $(H; xy)$, ce quasi-groupoïde est dit un *u-extragroupoïde* s'il satisfait à l'axiome :

(IV*) Il existe un sous-groupe $\bar{F} \supseteq N_u$ de $F(H)$ satisfaisant à la condition suivante : si $u_1, u_2, \cdots, u_n \in H$ sont tels que $H(u_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ soient incomparables deux à deux pour $\subset$, et si $x_1, x_2, \cdots, x_n, x'_1, x'_2, \cdots, x'_n \in H$ sont tels que, pour tout $i = 1, \cdots, n$, on ait $H(x_i) \cap H(x'_i) \supseteq H(u_i)$ (donc, x_i, x'_i

$\in g(u_i)$), $x_1x_2\cdots x_n \equiv x'_1x'_2\cdots x'_n \pmod{\bar{F}}$ implique $H(x_i^{-1}x'_i) \supset H(u_i)$ (à remarquer que $x_i^{-1}x'_i \in g(u_i) \subseteq H$).

On prouve que, si u satisfait à l'axiome (IV*), alors :

1) Elle est linéarisante, donc, un u-extragroupoïde est un u-paragroupoïde ;

2) $\bar{F} = N_u$.

On dit que $(H\,; xy)$ est un extragroupoïde s'il est un u-extragroupoïde pour quelque u. On peut prouver pour les extragroupoïdes quelques résultats supplémentaires.

Les catégories des groupes paragradués et extragradués sont fermées par rapport aux agglutinations par les homomorphismes quasi-homogènes (définis comme dans le cas gradué). Les catégories des quasi-groupoïdes et des paragroupoïdes (mais pas celle des extra-groupoïdes) sont fermées par rapport à la composition cartésienne et cartésienne restreinte de leurs supports, et dans le cas commutatif, par rapport à Hom et à End.

Les groupes gradués peuvent être considérés comme paragradués à condition de comporter le grade vide 0 et d'ordonner Δ de manière que tous les grades significatifs soient maximaux, que Inf Δ^*, où Δ^* est l'ensemble de ces grades, soit 0, et que $(\Delta, <)$ soit inférieurement complet et supérieurement inductif. Les groupes quasi-gradués peuvent être aussi considérés comme paragradués. Ils sont, d'ailleurs, extragradués.

Les groupes gradués et quasi-gradués se caractérisent, parmi les groupes extragradués, par la forme de l'ensemble (ordonné) des grades $(\Delta, <)$ de leur graduation propre. Un groupe extragradué est gradué ssi l'ensemble des grades $(\Delta, <)$ de sa graduation propre (qui est unique sans les conditions qui suivent, aux noms des grades près) est tel que $\Delta = \Delta^* \cup \{0\}$, où tous les $\delta \in \Delta^*$ sont maximaux et plus que 0. Et il est quasi-gradué sans être gradué ssi cet ensemble $(\Delta, <)$ est tel que $\Delta = \Delta^* \cup \{\omega, 0\}$, où tous les $\delta \in \Delta^*$ sont plus que ω et ω est plus que 0.

Références

[1] M. Chadeyras: Essai d'une théorie noetherienne homogène pour les anneaux commutatifs dont la graduation est aussi générale que possible. Suppl. Bull. Soc. Math. France, Mémoire, **22**, 1–143 (1970).

[2] M. Krasner: Une généralisation de la notion de corps-corpoïde. Un corpoïde remarquable de la théorie des corps valué. Comptes Rendus, **219**, 345–347 (1944).

[3] ——: Congruences multiplicatives. Squelettes et corpoïdes. Séminaire Krasner, exp. 4, 1953–1954., vol. 1, Sécr. Math. Fac. Sc. Paris, 39 pp.

[4] ——: Anneaux gradués généraux. Colloque d'algèbre, Rennes, 209–308 (1980).

[5] ——: Le vieux qui est neuf. Revue Roumain de Mathématiques pures et appliquées, t. XXVII, 443–472 (1982).