78. *Transformé de Fourier et produit de convolution de bons opérateurs*

Par H. CHARRIÈRE

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Sept. 12, 1986)

1. Les bons opérateurs analytiques linéaires. Pour tout $\rho \in \boldsymbol{R}$, on notera

$$\mathcal{B}_\rho^l = \{a = \sum_{n \in \boldsymbol{N}^p} a_n x^n,\ a_n \in \boldsymbol{C}^l \mid \|a\|_\rho = \sum \|a_n\| \rho^{|n|} < +\infty\}.$$

Introduisons les sous-ensembles $N_{l,p}$ de $\boldsymbol{N}^p \times \boldsymbol{N}^p$ définis par récurrence sur p par

$N_{1,1} = \{(k, j) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \mid k \geqslant j\}$; $N_{2,1} = \{(k, j) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \mid k < j\}$;

$N_{l,p+1} = \{(k, j) \in \boldsymbol{N}^{p+1} \times \boldsymbol{N}^{p+1} \mid ((k_1, \cdots, k_p), (j_1, \cdots, j_p)) \in N_{l,p}$ et $k_{p+1} \geqslant j_{p+1}\}$ pour tout l vérifiant $1 \leqslant l \leqslant 2^p$;

$N_{l,p+1} = \{(k, j) \in \boldsymbol{N}^{p+1} \times \boldsymbol{N}^{p+1} \mid ((k_1, \cdots, k_p), (j_1, \cdots, j_p)) \in N_{l-2^p,p}$ et $k_{p+1} < j_{p+1}\}$ pour tout l vérifiant $2^p + 1 \leqslant l \leqslant 2^{p+1}$.

Définition 1. Un bon opérateur analytique linéaire est une application linéaire

$$Q : \mathcal{B}_\rho^n \longmapsto \mathcal{B}_{\rho'}^m \qquad \text{définie par}$$

1°) la donnée d'une famille $(Q_{k,j})_{k \in \boldsymbol{N}^p, j \in \boldsymbol{N}^p}$ de $m \times n$-matrices à éléments complexes pour laquelle il existe des nombres réels positifs c_l et des p-uples de nombres réels positifs a_l, b_l $(1 \leqslant l \leqslant 2^p)$ vérifiant

$$\|Q_{k,j}\| \leqslant c_l a_l^k b_l^j \qquad \text{pour tout } (k, j) \in N_{l,p}.$$

2°) $$Q(\sum_j f_j x^j) = \sum_{(k,j)} Q_{k,j} f_j x^k.$$

Remarque. Un bon opérateur linéaire est continu de $\mathcal{B}_\rho^n$ dans $\mathcal{B}_{\rho'}^m$.

Exemples. La dérivation d/dx ; l'intégration $\int_0^x$; la mesure de Dirac ; la translation $t_a : f \longmapsto \{x \longmapsto f(x+a)\}$; la multiplication par un élément $g \in \mathcal{B}_\rho : f \longmapsto g \cdot f$ (pour ne pas confondre cet opérateur avec la fonction g ou la distribution g on le notera $g_{op.}$ et on l'appellera *bon opérateur fonction* g) ; l'opérateur *partie non polaire* de $h = \sum_{n>0} h_n x^{-n}$, $P_{np.}(h)$ est défini par : $f \longmapsto \{$partie non polaire de $h \cdot f\}$.

Définition 2. La dérivée d'un bon opérateur Q est par définition le bon opérateur

$$\frac{dQ}{dx} = \left[\frac{d}{dx}, Q\right].$$

2. Transformé de Fourier d'un bon opérateur.

Définition 3. Le transformé de Fourier (resp. transformé de Fourier inverse) d'un bon opérateur $Q = (Q_{k,j})_{k \in \boldsymbol{N}^p, j \in \boldsymbol{N}^p}$ est le bon opérateur $\mathcal{F}(Q)$ (resp. $\overline{\mathcal{F}}(Q)$) défini par

$$(\mathcal{F}(Q))_{k,j}=\sum_{l\in N^p,\ \sup_{1\leqslant h\leqslant p}(-j_h,-k_h)\leqslant l_h\leqslant 0}(i)^{|j|-|k|}(-1)^{|l+j|}\frac{j!}{(-l)!\,(k+l)!}Q_{j+l,k+l}.$$

(resp.

$$(\overline{\mathcal{F}}(Q))_{k,j}=\sum_{l\in N^p,\ \sup_{1\leqslant h\leqslant p}(-j_h,-k_h)\leqslant l_h\leqslant 0}(-i)^{|j|-|k|}(-1)^{|l+j|}\frac{j!}{(-l)!\,(k+l)!}Q_{j+l,k+l}.)$$

Dans ces formules i désigne un nombre complexe dont le carré est égal à -1 et pour un multi-indice $m=(m_1, m_2, \cdots, m_p)$, $m!$ désigne $m_1!\, m_2! \cdots m_p!$. Désignons lorsque $p=1$ par $\mathcal{H}$ l'algèbre des bons opérateurs Q vérifiant:

$$\begin{cases}\|Q_{k,j}\|\leqslant c_1\dfrac{1}{(k-j)!}a^k b^j & \text{pour } k\geqslant j \text{ et}\\ \|Q_{k,j}\|\leqslant c_2 C_j^k\alpha^k\beta^j & \text{pour } k<j,\ (C_j^k \text{ désignant le coéfficient du binôme}).\end{cases}$$

La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{H}$. Le transformé de Fourier d'un bon opérateur n'est pas toujours un bon opérateur. Par contre en introduisant

$$\mathcal{S}_p^n=\{f=\sum f_k x^k \mid \sum k!\, f_k x^k \in \mathcal{B}_p^n\},$$

on peut considérer les bons *opérateurs tempérés*, c'est-à-dire les bons opérateurs agissant sur $\mathcal{S}_p^n$.

Proposition 1. *On a:*

$$\mathcal{F}\left(\frac{dQ}{dx}\right)=\mathcal{F}(Q)\circ ix,$$

$$\frac{d}{dx}(\mathcal{F}(Q))=-\mathcal{F}(Q\circ ix),$$

de plus ces deux formules déterminent presque entièrement la transformation de Fourier.

On vérifie que formellement

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(Q))=\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(Q))=Q$$

et que de plus si $f_{op.}$ est un bon opérateur fonction, $\mathcal{F}(f_{op.})$ est le bon opérateur tempéré

$$\mathcal{F}(f_{op.})=\sum_{j\geqslant 0}(i)^j\frac{f^{(j)}(O)}{j!}\delta_o^{(j)}.$$

Si $f(u, v, \cdots)$ est une fonction de plusieurs variables analytique à l'origine d'un espace affine, $Q_u(f)$ (par exemple) désigne l'image par Q de la fonction $u\longmapsto f(u, v\cdots)$. Pour tout bon opérateur Q on note Q^t le bon opérateur défini par $(Q^t)_{k,j}=(Q_{k,j})^t$ où $(Q_{k,j})^t$ désigne la matrice transposée de la matrice $(Q_{k,j})$.

Proposition 2. *La définition du transformé de Fourier est équivalente à l'existence d'une transformation $\mathcal{F}$ vérifiant:*

(1′) $\quad \forall f\in\mathcal{B}_p^n \quad (\mathcal{F}(Q)(f))(x)=([\mathcal{F}(t_x(f^t))(Q_y^t(e^{-ixy}))])^t|_{y=x}.$

Dans la formule (1′) $[\cdots Q_y^t(e^{-ixy})]|_{y=x}$ signifie que dans la fonction entre crochets on a remplacé y par x.

Remarques.

1°) La transformation de Fourier est déterminée par sa connaissance sur les bons opérateurs fonctions.

2°) Il est possible de définir la notion de bon opérateur agissant sur des fonctions C^∞ et la formule (1′) permet alors d'étendre lorsque $m=n-1$ la notion de transformé de Fourier à ces opérateurs plus généraux.

Exemples de transformés de Fourier.

$\mathcal{F}(e^{iax})=\delta_a$; $\mathcal{F}(\delta_a)=e^{-iax}$; (δ_a désignant la mesure de Dirac au point a) ;

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dx^n}\right)=(-ix)^n\delta_0;\quad \mathcal{F}\left(\int_0^x\right)=P_{np.}\left(\frac{1}{ix}\right);\quad \mathcal{F}(t_a)=e^{-iax}\delta_0.$$

3. Produit de convolution de bons opérateurs.

Définition 4. Soient $Q=(Q_{k,j})_{k\in N^p, j\in N^p}$ et $R=(R_{k,j})_{k\in N^p, j\in N^p}$ deux bons opérateurs, le produit de convolution $Q*R$ de Q et de R est défini par :

$$(2)\quad (Q*R)_{k,j}=\sum_{h\in N^p}\ \sum_{\substack{l\in Z^p,\ \sup(-j_n,-h_n)\leqslant l_n\leqslant 0\\ L\in Z^p,\ \sup(-k_n,-h_n)\leqslant L_n\leqslant 0}}(-1)^{|h+l+L|}C_j^{-l}C_{h+l}^{-L}Q_{h+l,j+l}\cdot R_{k+L,h+L}.$$

Dans cette formule, pour tout couple de p-uple $m=(m_1, m_2, \cdots, m_p)$ et $n=(n_1, \cdots, n_p)$, le symbole C_m^n désigne le produit des coéfficients du binôme $C_{m_1}^{n_1}\cdots C_{m_p}^{n_p}$, les opérateurs Q et R étant tels que les produits de matrices intervenant dans cette formule soient bien définis.

Proposition 3. *La définition de $Q*R$ est équivalente à*

$$(2')\qquad \forall f\in\mathcal{B}_p^n:\quad (Q*R)^t(f)(x)=R_u^t(Q^t(t_u(f))(x-u))|_{u=x}.$$

Remarque. Comme la formule (1′), la formule (2′) permet de définir, lorsque $n=m=1$ le produit de convolution d'opérateurs agissant sur d'autres espaces fonctionnels que les $\mathcal{B}_p$.

Quelques propriétés de ce produit de convolution.

a) Si f est un bon opérateur fonction, $f*R$ pour tout bon opérateur R est un bon opérateur fonction.

b) $\mathcal{F}(Q)*\mathcal{F}(R)=\mathcal{F}(Q\circ R)$,

$\mathcal{F}(Q)\circ\mathcal{F}(R)=\mathcal{F}(Q*R)$,

$$\frac{d}{dx}(Q*R)=Q*\frac{dR}{dx}$$

$Q*\delta_0=\delta_0*Q=Q$.

c) Q est un bon opérateur fonction si et seulement si $Q=1*Q$.

Exemples.

$$\delta_a*\delta_b=\delta_{a+b};\quad \text{si } f\in\mathcal{B}_p \text{ et } g\in\mathcal{B}_p,\quad f*g=f(0)g;$$

$$\text{si } f\in\mathcal{B}_p,\quad f*P_{np.}\left(\frac{1}{x-a}\right)=\left(-\frac{f(x-a)-f(0)}{x-a}\right)_{op.}.$$

4. Des exemples de solutions bons opérateurs d'équations differentielles. Un bon opérateur linéaire Q est dit *constant* s'il est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dY}{dx}=\left[\frac{d}{dx},\ Y\right]=0.$$

Tout bon opérateur linéaire analytique constant s'écrit sous la forme

$$Y=\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{p!}A_p\frac{d^p}{dx^p}$$

où pour tout $p \in N$, A_p est une matrice constante telle que la série

$$\sum_{p \geqslant 0} A_p x^p$$

soit convergente dans un disque centré à l'origine de C.

Si $\sum_{k=0}^{n} a_k(d^k Y/dx^k)=Q$ est une équation différentielle linéaire d'ordre n dont les coéfficients a_k sont des nombres complexes, l'inconnue Y et Q des bons opérateurs, on désigne par conditions initiales la donnée des n bons opérateurs constants $(d^j Y/dx^j)*1$ $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$ (il est équivalent de se donner comme conditions initiales les n bons opérateurs $\delta_0 \circ (d^j Y/dx^j)$). Par exemple $E=\overline{\mathcal{F}}(P_{np.}(1/\sum_{k=0}^{n} a_k(ix)^k))$ est l'unique solution de $\sum_{k=0}^{n} a_k \times (d^k E/dx^k)=\delta_0$ pour les conditions initiales $(d^j E/dx^j)*1=0$ $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$. De plus $Y=Q*E$ est la solution de $\sum_{k=0}^{n} a_k(d^k Y/dx^k)=Q$ astreinte aux conditions initiales nulles. On retrouve aussi les solutions fondamentales distributions habituelles, qui sont les bons opérateurs tempérés

$$E_1=\overline{\mathcal{F}}\left(\left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k(ix)^k}\right)_{op.}\right),$$

ils correspondent aux conditions initiales $\delta_0 \circ (d^j E_1/dx^j)=(d^j E_1/dx^j)$ mais ne permettent pas de résoudre les équations homogènes associées. Citons encore l'équation $(\partial^2 E/\partial x_1^2)+(\partial^2 E/\partial x_2^2)=\delta_0$ qui admet pour solution fondamentale bon opérateur, l'opérateur

$$f \longmapsto E(f)=\int_0^{x_2}\left(\int_0^{t_2} \frac{f(-it_1, t_2)+f(it_1, t_2)}{2}\, dt_1\right) dt_2.$$

Référence

[1] H. Charrière: C. R. Acad. Sci. Paris, t. 297 (1983).