24. *Sur l'équation de Boussinesq des ondes de surface de l'eau*

Par Tadayoshi KANO*) et Takaaki NISHIDA**)

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., April 12, 1985)

1. Le problème de Cauchy non-dimensionnel pour les ondes de surface de l'eau remplissant la région $\Omega(t)=\{(x,y): x\in \boldsymbol{R},\ 0<y<\Gamma(t,x)\}$ se ramène à déterminer la représentation conforme $z=z(t,\zeta)=x+i\delta y$, où $\zeta=\xi+i\delta\eta$, de $\Omega(t)$ sur $\Omega_1=\{(\xi,\eta): \xi\in\boldsymbol{R},\ 0<\eta<1\}$ et l'image du potentiel de vitesses $\Phi(t,x,y)$ par cette représentation: soit $\varphi=\varphi(t,\xi,\eta)$ [1], [2].

Le paramètre δ est le rapport de la profondeur h de l'eau à la longueur λ des ondes qui s'introduit d'une manière naturelle dans la non-dimensionalisation du problème original: $\delta=h/\lambda$.

Sous la condition de l'interdiction du bas-fond sec et pour les données initiales analytiques, on a une fonction analytique $\Gamma(t,x;\delta)$ de la frontière libre et une autre $\Phi(t,x,y;\delta)$, analytique également, du potentiel de vitesses définies dans $\Omega(t)$ dépendant toutes les deux du paramètre non-dimensionnel δ d'une manière indéfiniment différentiable dans une classe de fonctions analytiques.

La profondeur non-dimensionnelle y' avait été introduite en haut par $y=hy'$, y étant la profondeur originale dimensionnelle. Compte tenu, maintenant, de l'ampleur α des ondes, on considère ici l'ampleur non-dimensionnelle y^1 définie par $y-h=\alpha y^1$, d'où $y'=1+\varepsilon y^1$ avec $\varepsilon=\alpha/h$.

On va considérer dans ce qui suit les ondes pour lesquelles ε et δ^2 sont de même ordre comme infinitésimaux lorsque $\alpha\ll h$ et $\lambda\gg h$, en posant carrément en fait $\varepsilon=\delta^2$.

Conformément à cette non-dimensionalisation, on considère, en omettant le signe prime "$'$", les autres quantités non-dimensionnelles:

$$x=\xi+\delta^2x^1,\quad y=\eta+\delta^2y^1,\quad \varphi=-t+\delta^2\varphi^1, \tag{1.1}$$

pour $\xi\in\boldsymbol{R}$, $0\leqq\eta\leqq1$.

Au lieu de considérer $\{x,y,\varphi\}$ dans [1], on va considérer le problème de Cauchy pour les équations correspondantes par rapport à $\{x^1,y^1,\varphi^1\}$. Avec les notations dans [1], [2], on a pour $\eta=1$:

$$y^1=(A_\delta/\delta)x^1, \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} x^1_t=\delta^2w^1A_\delta x^1_\xi A_\delta\varphi^1_\xi-B_\delta(w^1A_\delta\varphi^1_\xi)-\delta^2x^1_\xi B_\delta(w^1A_\delta\varphi^1_\xi),\\ \varphi^1_t=-(A_\delta/\delta)x^1+(\delta^2/2)w^1\{(A_\delta\varphi^1_\xi)^2-(\varphi^1_\xi)^2\}-\delta^2\varphi^1_\xi B_\delta(w^1A_\delta\varphi^1_\xi),\end{cases} \tag{1.3}$$

où

$$w^1=[(1+\delta^2x^1_\xi)^2+\delta^4(A_\delta x^1_\xi)^2]^{-1}.$$

2. D'après le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski [1], le problème de Cauchy pour (1.3): système quasi-linéaire par rapport

*) Département de Mathématiques, Université d'Osaka, Toyonaka, 560, Japon.
**) Département de Mathématiques, Université de Kyoto, Kyoto, 606, Japon.

à $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}$, avec des données $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}(0, \xi) \in X_{\rho_0}$ admet une et une seule solution $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}(t, \xi\,;\delta) \in X_\rho$, quel que soit $\rho<\rho_0$, pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$. Elle est indéfiniment différentiable dans X_ρ, quel que soit $\rho<\rho_0$, pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, par rapport à δ et peut être prolongée comme fonction harmonique de $(\xi, \delta\eta)$ pour $(\xi, \eta) \in \Omega_{1+\bar{a}\rho}=\{(\xi, \eta): \xi \in \boldsymbol{R},\ 0\leqq\eta<1+\bar{a}\rho,\ \bar{a}>0\}$ d'une manière qu'elle est aussi indéfiniment différentiable par rapport à δ comme telle.

Définissons $\gamma(t, x\,;\delta)$ par

$$\gamma(t, x\,;\delta)=y^1(t, \xi(t, x\,;\delta), 1\,;\delta) \tag{2.1}$$

où $\xi(t, x\,;\delta)$ est la fonction implicite définie par $x=x(t, \xi, 1\,;\delta)$. Alors la frontière libre $\Gamma(t, x\,;\delta)$ s'écrit comme suit:

$$\Gamma(t, x\,;\delta)=1+\delta^2\gamma(t, x\,;\delta). \tag{2.2}$$

De même pour le potentiel:

$$\Phi(t, x, y\,;\delta)=-t+\delta^2\phi(t, x, y\,;\delta), \tag{2.3}$$

où $\phi(t, x, y\,;\delta)=\varphi^1(t, \xi(t, x, y\,;\delta), \eta(t, x, y\,;\delta)\,;\delta)$ définie pour $(\xi, \eta) \in \Omega_{1+\bar{a}\rho}$.

Si on considère le potentiel de vitesses sur la surface, c'est-à-dire

$$\tilde{\phi}(t, x\,;\delta)=\phi(t, x, 1+\delta^2\gamma(t, x\,;\delta)\,;\delta), \tag{2.4}$$

alors, vu (1.2), (1.3) et leurs développements par rapport à δ, on a la

Proposition 2.1. *La solution $\{\gamma, \tilde{\phi}\}$ satisfait à l'équation suivante pour $|t|<a_1(\rho_1-\rho)$ dans X_ρ, quel que soit $\rho<\rho_1$ pour les données initiales $\{\gamma, \tilde{\phi}_x\}(0) \in X_{\rho_1}$:*

$$\begin{cases}\gamma_t+\tilde{\phi}_{xx}+\delta^2((1/3)\tilde{\phi}_{xxxx}+(\gamma\tilde{\phi}_x)_x)=O(\delta^4)\\ \tilde{\phi}_t+\gamma+(\delta^2/2)\tilde{\phi}_x^2=O(\delta^4).\end{cases} \tag{2.5}$$

3. Notons que l'on a le lemme suivant (cf. (4.7) dans [2]):

Lemme 3.1. *Le potentiel de vitesses a le développement suivant:*

$$\phi(t, x, y\,;\delta)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{\delta^{2n}y^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}\phi^0(t, x\,;\delta)}{\partial x^{2n}}+O(\delta^{2(N+1)}) \tag{3.1}$$

où $\phi^0(t, x\,;\delta)=\phi(t, x, 0\,;\delta)$.

De (2.5) et (3.1), on a pour $|t|<a_1(\rho_1-\rho)$, $\forall\rho<\rho_1$:

$$\begin{cases}\gamma_t+\phi^0_{xx}+\delta^2(\gamma\phi^0_x)_x-(\delta^2/6)\phi^0_{xxxx}=O(\delta^4),\\ \phi^0_t+\gamma+(\delta^2/2)(\phi^0_x)^2-(\delta^2/2)\phi^0_{txx}=O(\delta^4)\end{cases} \tag{3.2}$$

pour γ définie par (2.1), dans X_ρ.

On va comparer notre solution $\{\gamma, \phi^0\}$ de (3.2) avec celle du système ci-dessous (3.3) avec les données de Cauchy $\{\gamma, \phi^0_x\}(0)=\{\bar{\gamma}, \bar{\phi}^0_x\}(0)$:

$$\begin{cases}\bar{\gamma}_t+\bar{\phi}^0_{xx}+\delta^2(\bar{\gamma}\bar{\phi}^0_x)_x-(\delta^2/6)\bar{\phi}^0_{xxxx}=0,\\ \bar{\phi}^0_t+\bar{\gamma}+(\delta^2/2)(\bar{\phi}^0_x)^2-(\delta^2/2)\bar{\phi}^0_{txx}=0.\end{cases} \tag{3.3}$$

Or, le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski montre que la solution existante de (3.2) dépende continûment de données initiales et de second membre au sens de norme suivante:

$$M^1[w]=\sup_{0\leqq\rho<\rho_1,\,0\leqq t<a_1(\rho_1-\rho)}\|w(t)\|_\rho\left(1-\frac{t}{a_1(\rho_1-\rho)}\right)$$

si les données initiales appartiennent à X_{ρ_1} où

$$\|u\|_\rho=\max\{|u|_{\sigma,\rho},\ |u_x|_{L^\sigma_\rho}\}, \qquad X_\rho=\{u \in \mathscr{B}^\sigma_\rho,\ u_x \in L^\sigma_\rho\}.$$

D'où, on a le

Théorème 3.1. *Quel que soit* $\rho_2<\rho_1$, *positif, on a pour* $|t|<a_1(\rho_2-\rho)$, *quel que soit* $\rho<\rho_2$:

$$\|\gamma(t)-\bar{\gamma}(t)\|_\rho=O(\delta^4), \qquad \|\phi_x^0(t)-\bar{\phi}_x^0(t)\|_\rho=O(\delta^4).$$

4. En rapportant la seconde équation de (3.2) dans la première, on obtient

$$\phi_{tt}^0-\phi_{xx}^0-(\delta^2/2)\phi_{ttxx}^0+(\delta^2/6)\phi_{xxxx}^0+2\delta^2\phi_{tx}^0\phi_x^0+\delta^2\phi_t^0\phi_{xx}^0=O(\delta^4). \tag{4.1}$$

La solution $\phi^0(t, x; \delta)$ de (4.1) ne se diffère que de termes d'ordre $O(\delta^4)$ de la solution $\bar{\phi}^0(t, x; \delta)$ pour

$$\bar{\phi}_{tt}^0-\bar{\phi}_{xx}^0-(\delta^2/2)\bar{\phi}_{ttxx}^0+(\delta^2/6)\bar{\phi}_{xxxx}^0+2\delta^2\bar{\phi}_{tx}^0\bar{\phi}_x^0+\delta^2\bar{\phi}_t^0\bar{\phi}_{xx}^0=0. \tag{4.2}$$

C'est-à-dire que l'on a le

Théorème 4.1. *Quel que soit* $\rho<\rho_2<\rho_1$, *on a, pour* $|t|<a_1(\rho_2-\rho)$, $\|\phi^0-\bar{\phi}^0\|_\rho=O(\delta^4)$.

Il est à noter que l'équation (4.2), de même que (3.3), admet une solution des ondes permanantes du type $\bar{\phi}^0(t, x; \delta)=f(x\pm ct; \delta)$.

5. Vu les considérations dans n[os] 3–4, il nous semble raisonable d'appeler (4.2) l'équation de Boussinesq plutôt que celle proposée par Boussinesq lui-même en 1869–72 [3]:

$$\frac{d^2h}{dt^2}=gH\frac{d^2h}{dx^2}+gH\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{3}{2}\frac{h^2}{H}+\frac{H^2}{3}\frac{d^2h}{dx^2}\right), \tag{5.1}$$

où h représente la frontière libre.

En effet, si on remplace $\partial/\partial t$ par $\partial/\partial x$ dans "les termes d'ordre supérieur par rapport à δ" dans (4.2) et si on suppose que ϕ_t^0 soit approchée par $-\gamma$, comme a fait Boussinesq dans son article de 1872, on peut déduire (5.1) de (4.2). Mais l'équation (5.1) n'a pas de bonne relation linéaire de dispersion contrairement à ce qui est pour (4.2):

$$\mu^2=-k^2\left(\frac{1+(\delta^2/6)k^2}{1+(\delta^2/2)k^2}\right) \quad \text{pour} \quad (4.2),$$

$$\mu^2=-gHk^2\left(1-\frac{H^2}{3}k^2\right) \quad \text{pour} \quad (5.1).$$

Il serait donc difficile de dire si les solutions de (5.1) donnent une bonne approximation pour les solutions du problème de Cauchy de (3.2), ou encore de (4.1).

6. Remarques finales. 1°. Le problème de Cauchy pour (3.3), ou (4.2), est bien posé dans l'espace de Sobolev H^l. Une estimation a priori nous assure l'existence globale de solution de (4.2) par rapport au temps dans H^l, $l\geqq 4$.

2°. Dans [1] on avait intérdit le bas-fond sec. Ce qui n'exclut pas nécessairement les ondes telles que l'on ait $\varepsilon=\alpha/h=O(1)$ lorsque $\alpha\ll h$. C'est-à-dire que l'on a considéré dans [1] les ondes de surface de l'eau dans le cas où $\delta^2\ll\varepsilon$ lorsque $\alpha\ll h$ et $\lambda\gg h$. Ainsi la première approximation était les équations des ondes de surface en eau peu profonde, conformément à l'affirmation de G. B. Airy [3]. Le cas présent où $\varepsilon\sim\delta^2$, au contraire, explique bien l'existence des ondes permanantes et solitaires observées par J. Scott Russell [3].

Références

[1] T. Kano and T. Nishida: C. R. Acad. Sci. Paris, **287**, Sér. A, p. 83 et p. 137 (1978); J. Math. Kyoto Univ., **19**, p. 335 (1979).

[2] ——: Lect. Note Num. Appl. Anal., **6** (1984); Recent topics in nonlinear PDE, Hiroshima 1983. ed. M. Mimura, T. Nishida, Kinokuniya-North Holland, pp. 39–57.

[3] Bibliographies dans l'article dans J. Math. Kyoto Univ., cité en haut dans [1].

[4] T. Kano and T. Nishida: Une justification mathématique pour l'équation de Korteweg—de Vries des ondes de surface de l'eau (to appear).