77. *Dépendance linéaire de fonctions arithmétiques et presque arithmétiques*

Par Noriko HIRATA
Ochanomizu University

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Oct. 14, 1985)

§0. **Résumé.** En 1914, G. Pólya a démontré qu'une fonction entière f qui envoie N dans Z et vérifie

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log|f|_r}{r} < \log 2$$

est un polynôme [9]. On a noté, comme d'habitude, $|f|_r = \sup_{|z|=r}|f(z)|$.

Ensuite Hardy, Landau, Carlson et Pisot ont étudié les fonctions entières f vérifiant $f(Z)\subset Z$, Gross, Baker [1], Avauissiau et Gay, celles qui vérifient $f(N^m)\subset Z$, et Fukasawa [2], Gel'fond [3], Masser, Gramain [4] [5] celles qui vérifient $f(Z[i])\subset Z[i]$. Citons aussi les travaux de Gramain, Mignotte et Waldschmidt sur les fonctions à valeurs algébriques [6].

Nous étudions ici deux généralisations :

a) Dire qu'une fonction entière f est un polynôme équivaut à dire qu'elle est algébrique, c'est-à-dire que les fonctions

$$z^h\{f(z)\}^k, \qquad (h, k)\in N^2$$

sont linéairement dépendantes. Nous allons considérer une famille finie $f_1, \cdots, f_L$ de fonctions entières à valeurs dans Z. Sous des hypothèses convenables, nous montrons que ces fonctions sont linéairement dépendantes sur Q.

b) Au lieu de supposer que les valeurs des f_j $(1\leqslant j\leqslant L)$ sont entières, on peut supposer seulement qu'elles sont très proches de nombres entiers. On obtient ainsi une généralisation de certains résultats de Pisot.

§1. **Fonctions à valeurs entières.** Soient L et N_0 deux entiers avec $L>N_0>1$, $(\zeta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes deux-à-deux distincts, et $f_1, \cdots, f_L$ des fonctions entières. On définit, pour $N\geqslant 1$, $r(N) = \max_{1\leqslant n\leqslant N}|\zeta_n|$.

Théorème 1.1. *Il existe deux constantes positives c_1 et c_2, ne dépendant que de L et N_0 et que l'on peut expliciter, vérifiant la propriété suivante : si $f_j(\zeta_n)\in Z$ pour $1\leqslant j\leqslant L$, $n\geqslant 1$, et si, pour tout $N\geqslant N_0$, on a*

$$(1) \qquad \max_{1\leqslant j\leqslant L} \log|f_j|_{c_1\cdot r(N)} \leqslant c_2 N,$$

alors les fonctions $f_1, \cdots, f_L$, sont linéairement dépendantes sur Q.

On en déduit une version affaiblie du théorème de Pólya (avec log 2 remplacé par 1/44) en prenant pour $f_1, \cdots, f_L$ des fonctions

$$\frac{z(z-1)\cdot\cdots\cdot(z-h+1)}{h}\cdot\{f(z)\}^k, \qquad (h, k)\in N^2([9]).$$

D'autre part, si l'on considère, comme Gel'fond, des fonctions $z^h f(z+k)$, on obtient le résultat suivant;

Proposition 1.2. *Soit f une fonction entière vérifiant $f(\boldsymbol{N})\subset \boldsymbol{Z}$ et*

$$\log |f|_r<(7/9)r.$$

Alors f vérifie l'équation fonctionnelle

$$\sum_{h=0}^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2} a_{hk} z^h f(z+k)=0 \qquad \text{avec } N_1\in \boldsymbol{N},\ N_2\in \boldsymbol{N},\ a_{hk}\in \boldsymbol{Q}, \text{ et } a_{hk}$$

non tous nuls.

Remarquons que $7/9>\log 2$.

§2. Fonctions à valeurs presques entières. On considère, comme au §1, une suite $(\zeta_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres complexes deux-à-deux distincts et des fonctions entières $f_1, \cdots, f_L$. On définit aussi, pour $n\geqslant 2$,

$$\delta(n)=\min\{|\zeta_h-\zeta_i|,\ 1\leqslant h<i\leqslant n\}.$$

Enfin pour $z\in \boldsymbol{C}$ on note

$$\|z\|=\min_{m\in \boldsymbol{Z}}|z-m|.$$

Théorème 2.1. *Il existe des constantes positives c_1, c_2 et c_3 que l'on peut expliciter en fonction de L et N_0, vérifiant la propriété suivante: si pour tout $N\geqslant N_0$; on a*

$$\max \log |f_j|_{c_1\cdot r(N)}\leqslant c_2 N \tag{2}$$

et si, pour tout $(j, n)\in \boldsymbol{N}^2$, $1\leqslant j\leqslant L$, $n\geqslant 1$, on a

$$\|f_j(\zeta_n)\|\leqslant c_3 5^{-2n}\left(\frac{\delta(2n+1)}{2r(2n+1)}\right)^{n/2}, \tag{3}$$

alors les fonctions $f_1, \cdots, f_L$ sont linéairement dépendantes sur $\boldsymbol{Q}$.

Avec la même méthode, on peut obtenir le cas particulier d'un théorème de Pisot ([8] théorème 2).

Proposition 2.2. *Si une fonction entière f vérifie*

$$\log |f|_r<r/127$$

pour tout r suffisamment grand, et

$$\|f(n)\|<e^{-5n}$$

pour tout $n\in \boldsymbol{N}$ suffisamment grand, alors f est un polynôme.

Esquisse de démonstration du théorème 2.1. On choisit deux constantes $c_1>19$ et $c_2>0$ telles que pour tout $N\geqslant N_0$, on ait

$$\frac{1}{4}\log\frac{c_1-1}{2}-\frac{1}{2}\log 3-\frac{L}{L-N_0}\log L-\frac{1}{2}\frac{N_0}{L-N_0}-\log\frac{c_1}{c_1-1}>0,$$

$$c_2 N\leqslant \frac{(L-N_0)(N-1)}{L}\left(\frac{1}{2}\log\frac{c_1-1}{2}-\log 3\right)-\log L-\frac{N}{2L}$$

$$-\frac{L-N_0}{L}\log\frac{c_1}{c_1-1}.$$

Premier pas: construction d'une fonction auxiliaire: $F=\sum_{j=1}^{L} p_j f_j$. Il existe des entiers a_{jn} tels que $\|f_j(\zeta_n)\|=|f_j(\zeta_n)-a_{jn}|$ pour chaque $1\leqslant j\leqslant L$, $1\leqslant n\leqslant N_0$ avec $\log|a_{jn}|\leqslant 1/2+c_2N_0$. On peut trouver une solution $p_1, \cdots, p_L$ non triviale du système $\sum_{j=1}^{L} p_i a_{jn}=0$ $(N_0/2\leqslant n\leqslant N_0)$ et par le lemme de Siegel, on a une majoration des p_j $(1\leqslant j\leqslant L)$ qui donne

$$\log |F|_{c_1 r(N)} \leqslant \frac{L}{L-N_0}\left(\log L + \frac{N_0}{2L} + c_2 N\right) \qquad \text{pour tout } N \geqslant N_0.$$

Deuxième pas: extrapolation. Cosidérons les deux propriétés suivantes:

$A(N)$: $\quad \sum_{j=1}^{L} p_j a_{jn} = 0$ pour $N/2 \leqslant n \leqslant N$

$B(N)$: $\quad |F|_{r(N+1)} < 3^{-N} + 2^{-(N/10)}$.

Nous allons montrer que pour tout $N \geqslant N_0$

(I) $A(N)$ entraîne $B(N)$

(II) $B(N)$ entraîne $A(N+1)$.

Preuve de I. En utilisant $A(N)$, on a

$$F(\zeta_n) \leqslant c_3^{-1} \max_{1\leqslant j\leqslant L} \|f_j(\zeta_n)\| \text{ où } c_3 = (L^{N/(L-N_0)} e^{N_0/(L-N_0)(1/2+c_2 N_0)})^{-1},$$

donc on a

$$\max_{N/2\leqslant n\leqslant N} |F(\zeta_n)| \leqslant 5^{-N}\left(\frac{\delta(N+1)}{2r(N+1)}\right)^{N/2}.$$

Par ailleurs, on prend $\zeta_0 \in \boldsymbol{C}$ tel que $|\zeta_0| = r = r(N+1)$ et $\zeta_0 \neq \zeta_i (N/2 \leqslant i \leqslant N)$. La formule des résidus donne

$$|F(\zeta_0)| \leqslant |F|_{c_1 r} \cdot \frac{c_1}{c_1 - 1} \prod_{N/2\leqslant n\leqslant N} \frac{|\zeta_0 - \zeta_n|}{|c_1 r - \zeta_n|}$$
$$+ \prod_{N/2\leqslant k\leqslant N} |\zeta_0 - \zeta_k| \cdot \sum_{N/2\leqslant n\leqslant N} \left(|F(\zeta_n)| \cdot \left(\prod_{\substack{N/2\leqslant i\leqslant N \\ i\neq n}} \frac{1}{|\zeta_i - \zeta_n|}\right) \cdot \frac{1}{|\zeta_0 - \zeta_n|}\right).$$

En utilisant le lemme de Tijdeman ([11] lemme 3), on a

$$|F|_r \leqslant 3^{-N} + \max_{N/2\leqslant n\leqslant N} |F(\zeta_n)| \cdot 6^N N^{-(N/8)} \left(\frac{r(N+1)}{\delta(N+1)}\right)^{[N/2]} < 3^{-N} + 2^{-(N/10)}$$

d'où $B(N)$.

Preuve de II. On a $|\sum_{j=1}^{L} p_j a_{j,N+1}| \leqslant L \max_{1\leqslant j\leqslant L} (|p_j| \cdot \|f_j(\zeta_{N+1}\|) + |F(\zeta_{N+1})| \leqslant 5^{-4} + 3^{-2} + 2^{-(1/5)} < 1$ qui implique $A(N+1)$.

Troisième pas: Conclusion. $B(N)$ est vraie pour tout $N \geqslant N_0$, d'où l'on déduit que $F(z)$ est identiquement nulle.

Références

[1] Baker, A.: A note on integral-valued functions of several complex variables. Proc. Camb. Phil. Soc., **63**, 715–720 (1967).

[2] Fukasawa, S.: Über ganzwertige ganze Funktionen. Tôhoku Math. J., **27**, 41–52 (1926).

[3] Gel'fond, A.: Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières. ibid., **30**, 280–285 (1929).

[4] Gramain, F.: Fonctions entières arithmétiques. Séminaire Lelong-Skoda, 17ᵉannée (1976–1977), Lect. Notes in Math., Springer, vol. 694, pp. 98–125 (1978).

[5] ——: Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond. Invent. Math., **63**, 495–506 (1981).

[6] Gramain, F., Mignotte, M., et Waldschmidt, M.: Valeurs algébriques de fonctions analytiques. Acta Arith. (à paraître).

[7] Pisot, C.: Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle. C. R. Acad. Sci. Paris, **222**, 988–990 (1946).

[8] Pisot, C.: Sur les fonctions analytiques arithmétiques et presque arithmétiques. C. R. Acad. Sci. Paris, **222**, 1027–1028 (1946).
[9] Polya, G.: Über ganzwertige ganze Funktionen. Rend. Circ. Mat. Palermo, **40**, 1–16 (1915).
[10] Rudin, W.: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill series in higher Mathematics (1965).
[11] Tijdeman, R.: An auxiliary result in the theory of trascendental numbers. J. Numb. Th., **5**, 80–94 (1973).
[12] Waldschmidt, M.: Nombres transcendants. Lect. Notes in Math., Springer, vol. 402 (1974).
[13] ——: Pólya's theorem by Schneider's method. Acta Math. Acad. Scient. Hung., **31**, 21–25 (1978).
[14] Whittaker, E., and Watson, G.: A Course of Modern Analysis. Cambridge (1958).