30. *Sur les fonctions partiellement elliptiques*

Par Etsuko HIRAI
Département de Mathématique, Université de Kyoto Sangyo

(Communicated by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., March 12, 1984)

Dans la présente note, on se place toujours dans un domaine produit $D=V\times \boldsymbol{C}$ d'un domaine V sur le plan de x et de tout le plan $\boldsymbol{C}$ de y dans l'espace $\boldsymbol{C}^2$ de deux variables complexes x et y. Le but de cette note est d'étudier des problèmes qui se produisent quand une fonction analytique $F(x, y)$ dans D est considérée comme famille de fonctions entières ou méromorphes de y admettant un paramètre x. On suppose donc que $\partial F/\partial y \not\equiv 0$. Pour un ensemble quelconque E dans D, $E(a)$ désigne la section de E par la droite analytique $x=a$. L dénote la droite analytique $y=0$ dans D.

1. Comme on peut aisément le voir, on a deux énoncés suivants.

A. *Soit $F(x, y)$ une fonction holomorphe dans D, et soit e l'ensemble de $a\in V$, tels que $F(a, y)$ soit un polynôme de y. Si e est non dénombrable, $F(x, y)$ est un polynôme de y à coefficients holomorphes en x dans V.*

B. *Soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans un voisinage de L contenu dans D, et soit e l'ensemble de $a\in V$, tels que $f(a, y)$ puisse se prolonger analytiquement en un polynôme de y. Si e est non dénombrable, f doit être prolongée analytiquement dans D tout entier.*

Il est ici indispensable que e soit non dénombrable même s'il est partout dense dans V. Les énoncés sont aussi vrais même quand on considère des fonctions rationnelles au lieu de polynôme. De plus, on a l'énoncé suivant par T. Nishino [3].

Soit $F(x, y)$ une fonction holomorphe dans D, et soit e l'ensemble de $a\in V$, tels que $F(a, y)$ admette une période non nulle. Si e est non dénombrable, il en est de même pour tout x sauf au plus l'ensemble discret dans V.

Comme on peut facilement le voir, cet énoncé-ci ne peut pas être généralisé à la forme B. Mais, pour une fonction doublement périodique, on aura le

Théorème 1. *Soit $f(x, y)$ une fonction méromorphe dans un voisinage de L contenu dans D. Supposons qu'on puisse trouver un ensemble e non dénombrable tel que, pour tout $a\in e$, $f(a, y)$ puisse se prolonger analytiquement en une fonction elliptique de y. Alors, $f(x, y)$ peut se prolonger analytiquement dans D tout entier et, pour tout $a\in V$ sauf au plus un ensemble discret dans V, $f(a, y)$ devient une* *fonction elliptique de* y.

Une telle fonction sera dite *partiellement elliptique*. La condition que l'ensemble e soit non dénombrable est aussi indispensable même s'il est partout dense dans V. Dans la suite, nous éluciderons les caractères de telles fonctions.

2. Soit F une fonction méromorphe dans D. Un point $(a, b) \in D$ s'appellera *période* de F en a, si on a l'égalité $f(a, y+b)-f(a, b)=0$ pour tout $y \in \boldsymbol{C}$. L'ensemble E_F de tous ces points s'appellera *variété de période* de F. Evidemment $E_F(a)$ $(a \in V)$ est un sous-groupe additif discret de $\boldsymbol{C}$, dont le rang sur $\boldsymbol{Z}$ est 0, 1 ou 2, ou bien $\boldsymbol{C}$ soi-même. On peut ici dire que

La variété de période E_F *de* F *est fermée dans* D *et, de plus, se forme l'ensemble analytique dans* D.

Maintenant, on considère à priori un ensemble analytique E dans D tel que, pour tout $a \in V$, $E(a)$ soit un sous-groupe additif discret de $\boldsymbol{C}$ ou bien $\boldsymbol{C}$ soi-même. On l'appellera aussi *variété de période*. Le présent problème est de trouver une fonction méromorphe $F(x, y)$ dans D, dont la variété de période E_F coïncide avec E.

Toute composante de dimension zéro ou de la forme $x=a$ $(a \in V)$ de E s'appellera *période éventuelle*. La sous-variété analytique E^* de E obtenue par l'exception de toutes les périodes éventuelles a aussi la même propriété que E. On dit que E est *de rang* m si $m=\sup \operatorname{rang}_{a \in V} E^*(a)$. Pour de périodes éventuelles, on peut voir quelques énoncés, mais nous n'y toucherons pas dans cette note. Donc, dans la suite, tout E sera supposé d'être sans période éventuelle.

Au cas où E est de rang 1, on peut dire que

E *se compose toujours d'une infinité de composantes irréductibles de la forme* $y=ng(x)$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ *ou bien* $y=n(g(x))^{1/2}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *où* $g(x)$ *est une fonction méromorphe qui ne s'annule jamais dans* V [3].

Il s'ensuit aisément que, pour une telle E, l'on peut toujours former une fonction holomorphe F dans D telle que $E_F=E$.

Il s'agit donc du cas où E est de rang 2, on aura le

Théorème 2. *Pour toute variété de période* E *dans* D, *de rang* 2, *donnée à priori, on peut toujours trouver une fonction partiellement elliptique* F *telle que* $E_F=E$, *et de plus, on peut décider toutes ces fonctions.*

Grâce au théorème de Radó [4], on peut dire que l'ensemble de $a \in V$ tels que $\operatorname{rang} E(a)<2$ est discret dans V. Ceci nous permet de former la fonction demandée selon l'idée de Weierstrass. Lorsque $F(a, y)$ $(a \in V)$ cesse d'être elliptique, elle se réduit en une fonction rationnelle de y ou de e^{cy}, c étant un nombre complexe convenable.

3. Soit donnée une variété de période de rang 2 dans D. On peut alors considérer comme d'habitude, pour tout $x \in V$ excepté tous les points a auxquels on a rang $E(a) < 2$, le module $m(x)$ de $E(x)$ comme fonction holomorphe et uniforme de x. Elle peut se prolonger de façon méromorphe dans V tout entier. La fonction ainsi prolongée, qu'on désigne par la même notation $m(x)$, s'appellera *caractéristique* de E. Le présent problème est de former, pour une fonction méromorphe quelconque $m(x)$ donnée à priori dans V, toutes les variétés de période dont les caractéristiques sont égaux à $m(x)$. C'est un problème analogue à celui qui a été étudié par Kodaira [2] dans le recherche sur les surfaces elliptiques.

Une variété de période E de rang 2 dans D sera dite *régulière* si la condition suivante soit satisfaite: Lorsqu'on représente E par $y = a(x)$, on peut faire correspondre à tout $b \in V$ un entier positif n tel que, pour tout domaine angulaire δ de sommet b, suffisamment petit, et pour toute branche $\xi(x)$ de $a(x)$ dans δ, on a $\lim_{x \to b} \xi(x)(x-b)^n = 0$.

Soit $m(x)$ une fonction méromorphe dans D donnée à priori. Alors, à l'aide des solutions de l'équation différentielle de Gauss, on peut toujours former une variété de période régulière de caractéristique $m(x)$, puisque l'équation n'admet qu'un point singulier régulier. De plus, on a l'énoncé suivant:

Soient E_0 et E deux variétés de période dans D, de rang 2 et de même caractéristique $m(x)$. Supposons que l'une d'elles soit régulière. Alors, l'autre l'est aussi et on a la relation

$$E(x) = \varphi(x)^{1/N} E_0(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe dans V, et N est l'entier 6, 4 ou 2 suivant que $m(x)$ est la constante 0, 1 ou l'autre.

D'où, on sait que *toute variété de période est régulière.*

Grâce au théorème de Weierstrass, on peut former une variété de période, non-nécessairement unique, admettant le plus petit ordre de l'infini en chaque point singulier régulier. On l'appellera *primitive.*

En résumé, on a le

Théorème 3. *Pour une fonction méromorphe $m(x)$ dans V donnée à priori, on peut toujours former une variété de période E_0 primitive de caractéristique $m(x)$. Les autres variété de période E de même caractéristique sont données de la forme ci-dessus au moyen d'une fonction méromorphe φ dans V s'annulant nulle part mais d'ailleurs quelconque.*

Références

[1] L. R. Ford: Automorphic Functions. Chelsea, New York, 2nd ed. (1951).
[2] K. Kodaira: Ann. of Math., 77, 563–626 (1963).

[3] T. Nishino: J. Math. Kyoto Univ., **10**, 245–271 (1970).
[4] T. Radó: Math. Z., **20**, 1–6 (1924).
[5] R. Remmert und K. Stein: Math. Ann., **126**, 263–306 (1953).
[6] P. Thullen: ibid., **111**, 137–157 (1953).