3. *Noyaux des probabilités de transition de certains opérateurs différentiels en dimension infinie*

Par Bernard GAVEAU

Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, Paris*)

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Jan. 12, 1983)

En dimension infinie, les probabilités de transition d'un opérateur elliptique quelconque sont en général mutuellement singulières lorsque le temps varie. La note [1] démontrait, au contraire que les probabilités de transition d'un opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck de dimension infinie étaient en général absolument continues par rapport à la mesure invariante gaussienne. Cette note exhibe le même phénomène pour les opérateurs hypergéométriques confluents.

1. Probabilité de transition en une variable pour l'opérateur hypergéométrique confluent. Sur la demie-droite $\boldsymbol{R}^+$, l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1+\alpha-x)\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{1}$$

dont le générateur infinitésimal est l'opérateur hypergéométrique confluent a pour solution fondamentale

$$p_t(x,y)=\frac{(xye^{-t/2})^{-\alpha/2}}{1-e^{-t/2}}\exp\left(-\frac{(x+y)e^{-t/2}}{1-e^{-t/2}}\right)I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{xy}\,e^{-t/4}}{1-e^{-t/2}}\right) \tag{2}$$

où I_α désigne la fonction de Bessel usuelle d'indice α. Sa mesure invariante de probabilité est $(\Gamma(\alpha+1))^{-1}\,e^{-x}\,x^\alpha\,dx$.

Cette formule est dûe à Hille et Hardy [2] et nous allons en donner une nouvelle démonstration probabiliste. Posons $\gamma=\alpha+1$. L'équation de Itô [3] des processus associé à (1) est

$$dX_t=\sqrt{X_t}\,db_t+\frac{1}{2}(\gamma-X_t)dt \tag{3}$$

où b_t est le mouvement brownien usuel. Posons $Y_t^2=X_t$, $dY_t=\sigma db_t+\beta dt$. La formule d'Itô donne

$$d(Y_t^2)=2Y_t\,\sigma db_t+(2Y_t\beta+\sigma^2)dt. \tag{4}$$

Comparant alors (4) et (3), nous déduisons

$$\sigma=\frac{1}{2}\qquad \beta=\frac{1}{4}\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{Y_t}-\frac{Y_t}{4}.$$

Si $\gamma=n/2$ (n entier>0), nous déduisons

$$2dY_t=db_t+\left(\frac{n-1}{2}\,\frac{1}{2Y_t}-\frac{2Y_t}{2}\right)dt \tag{5}$$

*) 4 Place Jussieu, 75230 Paris, Cedex 05, France.

cette équation identifie en loi le processus $2Y_t$ à la partie radiale du processus de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\left(\Delta-\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ dans $\boldsymbol{R}^n$. Les composantes de ce processus sont des processus $x_i(t)$ d'Ornstein-Uhlenbeck indépendants de générateurs $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ et donc

$$Y_t=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right)^{1/2}.$$

Les lois des $x_i(t)$ étant des gaussiennes indépendantes, par convolution on déduit aussitôt la formule (2) dans le cas $\alpha=(n-2)/2$, puis dans le cas général.

2. Probabilités de transition de l'opérateur hypergéométrique dégénéré dans l'espace de Hilbert. Soit H l'espace de Hilbert des suites (x_n) de carré sommable, H^+ le cône de H formée des suites $(x_n)_n$ à termes positifs ; $(\mu_n)_n$ une suite de réels positifs avec

$$\sum \mu_n^{-2}<+\infty.$$

(6) $$L_n=x_n\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+(1+\alpha-\mu_n x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad L=\sum L_n.$$

Théorème 1. *Le noyau de la chaleur $Q_t(x, dy)$ de L solution de*

(7) $$\frac{\partial}{\partial t}Q_t(x, dy)=L_x Q_t(x, dy)$$

$$Q_t(x, dy)\longrightarrow\delta(x-y) \text{ si } t\longrightarrow 0^+$$

est absolument continu par rapport à la mesure de probabilité :
$\rho(dx)=\prod_n\left(\frac{e^{-\mu_n x_n}\mu_n^{\alpha+1}x_n^{\alpha}dx_n}{\Gamma(\alpha+1)}\right)$ *et définit un noyau*

(8) $$Q_t(x, dy)=q_t(x, y)\rho(dy).$$

Sous l'hypothèse (6), $\rho(dx)$ est une mesure portée par H^+. Posons

(9) $$z_n=\frac{\mu_n^2 e^{-\mu_n t}x_n y_n}{(1-e^{-\mu_n t})^2}$$

et notons $p_t^{(\mu_n)}(x_n, y_n)$ le noyau de la chaleur de L_n. Par (2) nous déduisons

(10) $$p_t^{(\mu_n)}(x_n, y_n)=\left(\frac{1}{1-e^{-\mu_n t}}\right)^{\alpha+1}\exp\left(\frac{-\mu_n(x_n+y_n)e^{-\mu_n t}}{1-e^{-\mu_n t}}\right) \times\sum_{k\geqslant 0}\frac{z_n^k}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}.$$

La série apparaissant au second membre de (9) est dominée par $1+(e^{z_n}-1)$; on déduit aussitôt que pour (x_n), (y_n) dans H^+, le produit infini des expressions (10) est convergent et définit le noyau $q_t(x, y)$ de (8).

3. Noyau de Green de L. **Théorème 2.** *Le noyau de Green de L, $G(x, dy)$ est absolument continu par rapport à $\rho(dy)$.*

En effet $G(x, dy)=\int_0^{+\infty}(Q_t(x, dy)-1)\rho(dy)dt.$

4. Un autre exemple sur un tore de dimension infinie. Considérons le cercle unité S et le produit infini S^N des suites $\theta_n \in [0, 2\pi]$. Soit $\Lambda_n = \left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta_n^2}\right)^{1/2}$ considéré au sens des opérateurs pseudodifférentiels. Soit λ_n une suite tendant vers $+\infty$ telle que $\sum e^{-\lambda_n t} < +\infty$ pour tout $t > 0$. L'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_n \lambda_n \Lambda_n$$

a pour solution fondamentale

$$Q_t(\theta, d\theta') = q_t(\theta, \theta')\left(\prod_n \frac{d\theta'_n}{2\pi}\right)$$

où $q_t(\theta, \theta')$ est le noyau défini par le produit infini absolument convergent:

$$q_t(\theta, \theta') = \prod_n \left(\frac{1-e^{-2\lambda_n t}}{1-2e^{-\lambda_n t}\cos(\theta-\theta')+e^{-2\lambda_n t}}\right).$$

Ici encore nous avons une famille de probabilités de transition absolument continue par rapport à la mesure invariante de S^N.

Bien sûr, cela est faux si nous remplaçons Λ_n par $\partial^2/\partial\theta_n^2$.

Références

[1] B. Gaveau: Noyau des probabilités de transition de certains opérateurs d'Ornstein-Uhlenbeck dans l'espace de Hilbert. C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **293**, 469–472 (1981).

[2] A. Erdelyi: Bateman manuscript project; Higher Transcendental Functions.

[3] H. McKean: Stochastic Integrals. Acad. Press, New York (1969).