49. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres.* VIII

Par J.-L. MAUCLAIRE

C.N.R.S. et Université Waseda

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 12, 1983)

Soit $f: N^* \to \{0,1\}$ une suite indexée par les entiers strictements positifs ne prenant que les valeurs 0 et 1. f est donc la fonction caractéristique d'une partie A de N^*. On suppose que f est limite-périodique B^1 (voir [3]). On définit une function $\delta(n)$ par:

$$\delta(n)=\begin{cases}0 & \text{si } n \notin A,\\ \min\limits_m \{m-n \mid m>n,\ m\in A\} & \text{si } n\in A\,;\end{cases}$$

dans ce cas, δ est l'écart entre deux éléments consécutifs de A. On a le résultat suivant:

Théorème. *Si la densité de A est non-nulle, alors $\delta(n)$ est limite-périodique B^1.*

Preuve. 1) On a $\sum_{n\le x}\delta(n)=x+o(x)$, $x\to+\infty$.

En effet, soient $N(x)=\mathrm{Max}\{n \mid n\le x,\ n\in A\}$ et $L(x)=\delta(N(x))+N(x)$. Pour y vérifiant $N(x)\le y\le L(x)-1$, on a

$$S(y)=\sum_{n\le x} f(n)=S(N(x))=S(L(x)-1).$$

D'où, comme la moyenne de f existe et égale la densité de A,

$$o(1)=\frac{S(N(x))}{N(x)}-\frac{S(L(x)-1)}{L(x)-1}=S(y)\cdot\left(\frac{1}{N(x)}-\frac{1}{L(x)-1}\right)$$
$$=S(y)\cdot\frac{\delta(N(x))-1}{N(x)\cdot(L(x)-1)},$$

ce qui donne

$$\frac{\delta(N(x))}{N(x)}\cdot d(A)=o(1),\qquad x\longrightarrow+\infty,$$

i.e.
$$\frac{\delta(N(x))}{N(x)}=o(1),\qquad x\longrightarrow+\infty.$$

Or, $\sum_{n\le x}\delta(n)=L(x)-\mathrm{Min}\{n \mid n\in A\}$. Donc, comme

$$\frac{S(N(x))}{N(x)}=\frac{S(y)}{y}+o(1)=\frac{S(L(x)-1)}{L(x)-1}+o(1),$$
$$x\longrightarrow+\infty,\quad \text{si}\quad N(x)\le y\le L(x)-1,$$

on a, en choisissant $y=x$,

$$\frac{N(x)}{x}=1+o(1),\qquad x\longrightarrow+\infty.$$

Et comme $\delta(N(x))=o(N(x))$, on obtient

$$\frac{L(x)}{x}=1+o(1),\qquad x\longrightarrow+\infty.$$

2) Soit $g_k(n)=f(n)\cdot(1-f(n+1))\cdot(1-f(n+2))\cdots(1-f(n+k))$, $(k\geq 0$, fixé). Alors, $g_k(n)\in B^1$.

Posons $\delta_N(n)=\sum_{0\leq k\leq N} g_k(n)$. Il est clair que $\delta_N(n)\in B^1$ et que l'on a

$$\delta_N(n)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad n\notin A\\ \delta(n) & \text{si} \quad n\in A \quad \text{et} \quad \delta(n)\leq N\\ N+1 & \text{si} \quad n\in A \quad \text{et} \quad \delta(n)>N.\end{cases}$$

Pour démontrer que $\delta(n)\in B^1$, comme $|\delta(n)-\delta_N(n)|=\delta(n)-\delta_N(n)$, on démontrera que

$$\lim_{N\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}(\delta(n)-\delta_N(n))=0,$$

c'est-à-dire, que

$$(*)\qquad \lim_{N\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\delta_N(n)=1.$$

Preuve de (*). On utilise les notations de [3] et l'analogue du théorème 5.1 de [4]. A f on peut associer g, fonction caractéristique d'un ensemble mesurable B de G pour la mesure dm, d'après le résultat ci-dessus mentionné.*) On en déduit qu'à δ_N s'associe une fonction D_N de $\mathcal{L}(G, dm)$ définie dm presque-partout par

$$D_N(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t\notin B\\ n(t) & \text{si} \quad t\in B \quad \text{et} \quad n(t)\leq N\\ N+1 & \text{si} \quad t\in B \quad \text{et} \quad n(t)\geq N+1,\end{cases}$$

où $n(t)$ est définie par

$$n(t)=\min_m\{m>0\,|\,m+t\in B\} \quad \text{si} \quad t\in B.$$

Comme la suite des entiers positifs est dense dans le groupe abélien compact G, la transformation $T: t\to t+1$ de G vers G est ergodique (voir [1]). Par conséquent, $n(t)$ est le temps de retour (le "Poincaré cycle") de t pour T dans B, et un résultat de Kac (voir [2]) nous dit que

$$\int_B n(t)dm(t)=1.$$

Or, d'après [3], théorème 2.1, on a

$$(**)\qquad \int_G D_N(t)dm(t)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\delta_N(n).$$

Mais $\int_G D_N(t)\,dm(t)=\int_B D_N(t)dm(t)$.

Pour démontrer (*), d'après (**), il suffit de démontrer que

$$\int_B D_N(t)dm(t)=1.$$

Comme $n(t)\geq D_N(t)$ dm presque-partout, il suffit de montrer que

$$\Delta=\lim_{N\to+\infty}\int_B(n(t)-D_N(t))dm(t)=0.$$

---

*) Comme $f=f^2\in B^1$ les transformées de Fourier de g et de g^2 sont les mêmes, donc $g=g^2$ dm presque-partout.

Or, $n(t) \in \mathcal{L}^1(G, dm)$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\Delta &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{m\geq N} m\cdot \text{mesure de } \{t \in G \mid n(t)=m\} \\ &=0,\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

Références

[1] P. Halmos: Ergodic Theory. Publications of the Mathematical Society of Japan, 3, Tokyo (1956).
[2] M. Kac: On the notion of recurrence in discrete stochastic processes. Bull. Amer. Math. Soc., **53**, 1002–1010 (1947).
[3] J.-L. Mauclaire: Suites limite-périodiques et théorie des nombres. I. Proc. Japan Acad., **56**A, 180–182 (1980).
[4] ——: ditto. III. ibid., **56**A, 294–295 (1980).