48. Sommes de Gauss modulo p^{α}. II

Par J.-L. MAUCLAIRE
C.N.R.S. et Université Waseda

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 12, 1983)

On traite ici le cas où $p=2$. On a

Théorème 2. *χ ètant un caractère primitif modulo 2^{α}, on note $\tau(\chi)$ la somme de Gauss modulo 2^{α} définie par*

$$\tau(\chi)=\sum_{x\in(Z/2^{\alpha}Z)^{*}}\chi(x)\exp\left(2i\pi\frac{x}{2^{\alpha}}\right).$$

Alors

1. *Si $\alpha=2k$, on définit h par $\chi(1+2^{k})=\exp\left(-2i\pi\frac{h}{2^{k}}\right)$, $0<h<2^{k}$;*

alors, pour tout $L\equiv h \bmod 2^{k}$, on a

$$\tau(\chi)=2^{k}\cdot\chi(L)\exp\left(2i\pi\frac{L}{2^{2k}}\right).$$

2. *Si $\alpha=2k+1$, $k\geq 2$, soit h l'unique entier vérifiant*

$$\chi(1+2^{k}+2^{2k-1})=\exp\left(-2i\pi\frac{h}{2^{k+1}}\right),\qquad 0<h<2^{k+1};$$

h s'écrit en base 2 sous la forme $h=h_{1}+u2^{k}$ ($u=0$ ou 1) où

$$h_{1}=\sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon_{i}2^{i},\quad \varepsilon_{i}\in\{0,1\},\quad i=0,1,\cdots,k-1.$$

h_{1} et u sont déterminés de façon unique. Alors, on a

$$\tau(\chi)=2^{k}\cdot\chi(h_{1})\exp\left(2i\pi\frac{h_{1}}{2^{2k+1}}\right)\cdot(1-\exp(i\pi(u+h/2))).$$

Preuve. Le cas 1 du théorème 2 a été établi dans la partie I (Voir [1]); il ne reste donc qu'à considérer le cas 2. On laisse de côté le cas $k=1$ qui se traite par un calcul direct. Supposons donc $k\geq 2$.

En utilisant les mêmes notations et méthodes qu'en [1], on vérifie que $\hat{\Gamma}_{k+1}$ est composé des ψ_{h}, $0\leq h\leq 2^{k+1}-1$, définis par

$$\psi_{h}(1+2^{k}m)=\exp\left(2i\pi\frac{h}{2^{2k+1}}(-2^{k}m+2^{2k-1}m^{2})\right);$$

on remarque que

$$\psi_{k}\neq\psi_{l}\qquad \text{si } h\not\equiv l \bmod 2^{k+1},$$

et que

$$\psi_{h}(1+2^{k}m)\psi_{h}(1+2^{k}n)=\exp\left(2i\pi\frac{h}{2^{k+1}}(-m-n)\right)\exp\left(2i\pi\frac{h}{4}(m^{2}+n^{2})\right)$$
$$=\psi_{h}((1+2^{k}m)(1+2^{k}n)).$$

On a donc

$$\tau(\chi)=\sum_{x\in(Z/2^{2k+1}Z)^*}\chi(x)\exp\left(2i\pi\frac{x}{2^{2k+1}}\right)$$
$$=\sum_{\theta\in(Z/2^kZ)^*}\sum_{0\leq m\leq 2^{k+1}-1}\chi(\theta(1+2^km))\exp\left(2i\pi\frac{\theta(1+2^km)}{2^{2k+1}}\right)$$
$$=\sum_{\theta\in(Z/2^kZ)^*}\chi(\theta)\exp\left(2i\pi\frac{\theta}{2^{2k+1}}\right)\cdot\sum_{0\leq m\leq 2^{k+1}-1}\chi(1+2^km)\exp\left(2i\pi\frac{2^km\theta}{2^{2k+1}}\right)$$
$$=\sum_{\theta\in(Z/2^kZ)^*}\chi(\theta)\exp\left(2i\pi\frac{\theta}{2^{2k+1}}\right)$$
$$\cdot\sum_{0\leq m\leq 2^{k+1}-1}\exp\left(2i\pi\left(\frac{h}{2^{k+1}}(-m+2^{k-1}m^2)\right)+\frac{m\theta}{2^{k+1}}\right).$$

On calcule la seconde somme, qui s'écrit

$$\sum_{0\leq m\leq 2^{k+1}-1}\exp\left(2i\pi\frac{\theta-h}{2^{k+1}}m\right)\exp\left(2i\pi\frac{h}{4}m^2\right)$$
$$=\sum_{\substack{0\leq n\leq 2^k-1\\(m=2n)}}\exp\left(2i\pi\frac{\theta-h}{2^{k+1}}2n\right)$$
$$+\sum_{\substack{0\leq n\leq 2^k-1\\(m=2n+1)}}\exp\left(2i\pi\frac{\theta-h}{2^{k+1}}(1+2n)\right)\exp\left(2i\pi\frac{h}{4}\right)$$
$$=\left(1+\exp\left(2i\pi\left(\frac{\theta-h}{2^{k+1}}+\frac{h}{4}\right)\right)\right)\cdot\sum_{0\leq n\leq 2^k-1}\exp\left(2i\pi\frac{\theta-h}{2^k}n\right)$$
$$=\begin{cases}0 & \text{si } \theta-h\not\equiv 0 \bmod 2^k\\ \left(1+\exp\left(2i\pi\frac{\theta-h}{2^{k+1}}\right)\exp\left(2i\pi\frac{h}{4}\right)\right)2^k & \text{si } \theta-h\equiv 0 \bmod 2^k.\end{cases}$$

On pose $h=\theta+u2^k$. Comme $0\leq h\leq 2^{k+1}-1$ et $0\leq\theta\leq 2^k-1$, on voit que u ne peut prendre que la valeur 0 ou 1. On obtient

$$\tau(\chi)=\chi(h-u2^k)\exp\left(2i\pi\frac{h-u2^k}{2^{2k+1}}\right)2^k\left(1+\exp\left(2i\pi\frac{-u2^k}{2^{k+1}}\right)\exp\left(2i\pi\frac{h}{4}\right)\right)$$
$$=\chi(h-u2^k)\exp\left(2i\pi\frac{h-u2^k}{2^{2k+1}}\right)2^k\left(1+\exp\left(i\pi\left(-u+\frac{h}{2}\right)\right)\right).$$

Or

$$\chi(1+2^k+2^{2k-1})=\chi(1+2^k(1+2^{k-1}))$$
$$=\exp\left(2i\pi\frac{h}{2^{2k+1}}(-2^k(1+2^{k-1})+2^{2k-1}(1+2^{k-1})^2)\right)$$
$$=\exp\left(-2i\pi\frac{h}{2^{k+1}}\right),\qquad\text{car } k\geq 2.$$

D'où le 2) du théorème 2.

Remarque. La méthode utilisée dans le cas de $Z/p^{2k}Z$ peut s'étendre pour démontrer, par exemple, le résultat suivant.

Soit R une représentation de $G_n^{(2k)}=GL_n(Z/p^{2k}Z)$; on définit la somme de Gauss associée à R par

$$\tau(R)=\sum_{M\in G_n^{(2k)}}R(M)\exp\left(2i\pi\frac{1}{p^{2k}}Tr(M)\right).$$

Alors on a

Proposition. *Soit R une représentation de $GL_n(Z/p^{2k}Z)$. Soit A la matrice à coefficients dans Z/p^kZ de dimension n définie de façon unique par*

$R(1+p^kC)=\exp(-2i\pi(1/p^k)Tr\,AC)$, *pour tout C de $M_n(Z/p^kZ)$. Alors la somme de Gauss $\tau(R)$ associée à R vérifie l'égalité*

$$\tau(R)=\begin{cases} R(L)\exp\left(2i\pi\dfrac{TrL}{p^{2k}}\right)\cdot p^{kn^2} \\ \quad \text{pour tout } L\equiv A \bmod p^k, \text{ si } A\in GL_n(Z/p^kZ). \\ 0 \text{ si } A\notin GL_n(Z/p^kZ). \end{cases}$$

Preuve. On peut écrire de façon unique $M=H\cdot B$, où $H\equiv M$ mod p^k, $H\in GL_n(Z/p^kZ)=G_n^{(k)}$, et $B\equiv H^{-1}M=1+p^kC$, où $C\in M_n(Z/p^kZ)=M_n^{(k)}$. On a donc

$$\tau(R)=\sum_{H,C}R(H(1+p^kC)\exp\left(2i\pi\frac{1}{p^{2k}}Tr\,H(1+p^kC)\right)$$

$$=\sum_{H\in G_n^{(k)}}R(H)\exp\left(2i\pi\frac{1}{p^{2k}}TrH\right)\cdot\sum_{C\in M_n^{(k)}}R(1+p^kC)\exp\left(2i\pi\frac{1}{p^k}Tr\,HC\right).$$

Or, le sous-groupe $\{1+p^kC,\ C\in M_n^{(k)}\}$ de $G_n^{(2k)}$ est isomorphe à $(Z/p^kZ)^{n^2}$, et par conséquent $R(1+p^kC)=\exp(2i\pi((-1/p^k)TrAC))$, où $A\in M_n^{(k)}$ est fixée. On a donc, pour la deuxième somme,

$$\sum_{C\in M_n^{(k)}}R(1+p^kC)\exp\left(2i\pi\frac{1}{p^k}Tr\,HC\right)=\sum_{C\in M_n^{(k)}}\exp\left(2i\pi\frac{1}{p^k}Tr(H-A)C\right)$$

$$=\begin{cases}0 & \text{si } H-A\not\equiv 0 \bmod p^k \\ p^{kn^2} & \text{si } H\equiv A \quad \bmod p^k,\end{cases}$$

d'où

$$\tau(R)=\begin{cases}R(A)\exp\left(2i\pi\dfrac{1}{p^{2k}}Tr\,A\right)\cdot p^{kn^2} & \text{si } A\in GL_n(Z/p^kZ) \\ 0 \quad \text{sinon.}\end{cases}$$

Si $A\in GL_n(Z/p^kZ)$, soit $L\equiv A$ mod p^k; alors $L=A(1+p^kB)$ et

$$R(L)\exp\left(2i\pi\frac{TrL}{p^{2k}}\right)=R(A)\cdot R(1+p^kB)\exp\left(2i\pi\frac{Tr(A+p^kAB)}{p^{2k}}\right)$$

$$=R(A)\exp\left(2i\pi\frac{TrA}{p^{2k}}\right)=\tau(R)\cdot p^{-kn^2}$$

ce que démontre la Proposition.

Référence

[1] J.-L. Mauclaire: Sommes de Gauss mod p^α. I. Proc. Japan Acad., **59A**, 109–112 (1983).