86. *Sur l'Unicité du Prolongement des Solutions pour Quelques Equations Différentielles Paraboliques*

Par Yujiro OHYA
Université de Kyoto

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1961)

1. *Introduction.* Nous voulons donner un résultat pour l'unicité des solutions dans la direction de l'espace pour l'équation parabolique de la forme:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u(x, t)=0 \tag{1.1}$$

où L est un opérateur elliptique du quatrième ordre:

$$L=\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2+\left(\text{termes d'ordre}\leq 3 \text{ en } \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right) \tag{1.2}$$

$a_{ij}(x, t)$ étant des fonctions à valeurs réelles, vérifiant la condition suivante:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geq \delta(x, t) \mid \xi \mid^2, \qquad \delta(x, t)>0 \tag{1.3}$$

et de plus, pour simplifier le raisonnement, supposons que tous les coefficients dans (1.1) soient indéfiniment différentiables.

Notre but est de montrer le

THEOREME. *Soit $u(x, t)$ une solution de* (1.1) *au voisinage de l'origine* $((x, t)=(0, 0))$. *Si, sur l'hyperplan $x_n=0$, $u(x, t)$ s'annule avec ses dérivées jusqu'à l'ordre* 3, *alors $u(x, t)$ s'annule identiquement dans un voisinage de l'origine.*

M. Mizohata a montré ce théorème pour l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial t}-L\right)$, où L est un opérateur elliptique du second ordre. Mais, à ma connaissance, le théorème ci-dessus n'est pas encore connu. Ce travail a été inspiré par [3]. Voici la raison: Considérons le cas très simple, $L=\Delta^2$. Alors,

$$\Delta^2-\frac{\partial}{\partial t}=\left(\Delta+\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}\right)\left(\Delta-\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}\right).$$

Comme on verra dans la suite, les deux opérateurs dans le second membre, ont le même caractère que les opérateurs elliptiques (à coefficients réels) du quatrième ordre.

Je tiens à exprimer ma vive gratitude à M. S. Mizohata pour ses suggestions et ses conseils.

2. On fait le changement des variables de telle manière que la solution transformée ait son support strictement convexe dans $x_n \geq 0$:

$x'_n = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + t^2$, $x'_i = x_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $t' = t$. Ensuite on change la notation des variables x: $x'_n \to t$, $t' \to x_n$, c'est-à-dire, $(x'_1, \cdots x'_{n-1}, x'_n, t') \to (x_1, \cdots x_{n-1}, t, x_n)$. On pose l'équation transformée sous la forme.

$$\left(P^2 + \Delta' - \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = Su, \qquad \Delta' = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{2.1}$$

où S est un opérateur différentiel en $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)^{\nu_{n-1}}$ $(i + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{n-1} \leq 3)$, $P = A_0(x, t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + 2A_1\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + A_2\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x'}\right)$ et on voit facilement que $A_1^2 - A_0 A_2 > 0$, $A_0 > 0$, au voisinage de l'origine.

Et puis, on décompose le premier membre de (2.1) en deux membres

$$\left(P + \sqrt{-\Delta' + \frac{\partial}{\partial x_n}}\right)\left(P - \sqrt{-\Delta' + \frac{\partial}{\partial x_n}}\right) - S_1$$

où $\| S_1 u \|_{L^2(R^n)} \leq c \sum_{i+|\nu'| \leq 2} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu'} u \right\|_{L^2(R^n)}$ pour toute $u(x, t)$ à support compact dans un compact fixe de R^n_x.

En effet, S_1 est égale à $\sqrt{-\Delta' + \frac{\partial}{\partial x_n}} P - P \sqrt{-\Delta' + \frac{\partial}{\partial x_n}}$, qui est un opérateur borné de L^2 dans lui-même (voir [3]).

Donc, a fortiori, on a

$$\left(P + \sqrt{-\Delta' + \frac{\partial}{\partial x_n}}\right)\left(P - \sqrt{-\Delta' + \frac{\partial}{\partial x_n}}\right) u = (S_1 + S) u \equiv S_0 u. \tag{2.2}$$

Compte tenu de (2.1) et (2.2), on considère l'équation caractéristique

$$A_0(x, t)\lambda^2 + 2A_1(x, t, 2\pi i \xi')\lambda + A_2(x, t, 2\pi i \xi') \pm \sqrt{4\pi^2 |\xi'|^2 + 2\pi i \xi_n} = 0. \tag{2.3}$$

Calderón a utilisé $\hat{\Lambda}(\xi) = |\xi|$. Par contre, Mizohata a utilisé $\hat{\Lambda}(\xi) = \sqrt[4]{|\xi'|^4 + \xi_n^2}$ dans [3]. Ici on va utiliser $\hat{\Lambda}(\xi) = \sqrt[8]{|\xi'|^8 + \xi_n^2}$. (Notre décompositions (2.1) et (2.2) nous semblent artificielles, mais pour notre raisonnement elles sont très commodes.)

Remarquons que (2.3) admet quatre racines:

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2(x, t, \xi) &= \frac{1}{A_0}\left\{-A_1 \pm A_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{(A_1^2/A_0 - A_2) + \sqrt{4\pi^2 |\xi'|^2 + 2\pi i \xi_n}}\right\} \\ \lambda_3, \lambda_4(x, t, \xi) &= \frac{1}{A_0}\left\{-A_1 \pm A_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{(A_1^2/A_0 - A_2) - \sqrt{4\pi^2 |\xi'|^2 + 2\pi i \xi_n}}\right\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

où on fixe la détermination de $\sqrt{\cdots}$ comme sa partie réelles ≥ 0.

On désigne

$$\lambda_i(x, t, \xi) = (\sigma(P_i)(x, t, \xi) + i\sigma(Q_i)(x, t, \xi))\hat{\Lambda}(\xi) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.5}$$

où les $\sigma(P_i)$ et $\sigma(Q_i)$ sont des parties réelles et imaginaires respectivement. On constate facilement qu'il existe une constante positive $c > 0$ telle que

$$\begin{matrix} \operatorname{Re}\sigma(P_1)(x,t,\xi), & \operatorname{Re}\sigma(P_3)(x,t,\xi)\geq c \\ \operatorname{Re}\sigma(P_2)(x,t,\xi), & \operatorname{Re}\sigma(P_4)(x,t,\xi)\leq -c \end{matrix} \tag{2.6}$$

pour tout ξ.

Ceci remarqué, on peut décomposer $P\pm\sqrt{-\Delta'+\frac{\partial}{\partial x_n}}$ sous la forme;

$$P+\sqrt{-\Delta'+\frac{\partial}{\partial x_n}}=\Big(\frac{\partial}{\partial t}+(P_1+iQ_1)\Lambda\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t}+(P_2+iQ_2)\Lambda\Big)+C_1. \tag{2.7}$$

Pour justifier cette décomposition avec une majoration de l'opérateur C_1, nous devons examiner les symboles de plus près. Nous nous appuyons sur le

Théorème 2.1 (Th. 2 de [3]). *Soient H, H_1, H_2, des opérateurs dont les symboles vérifient les conditions suivantes:*

$$\sigma(H)=\hat{h}(x,\xi)=\sum_{\nu\geq 0} a(x)^\nu \hat{h}_\nu(\xi) \qquad a(x)=(a_1(x),\cdots,a_p(x))$$

où
$$|\hat{h}_\nu(\xi)|\leq K<\infty \qquad (\text{pour tout } \nu\geq 0)$$
$$|a_i(x)|\leq\rho<1 \qquad i=1,2,\cdots,p \qquad a(x)\in(\mathcal{B})$$

1) *$\hat{\Lambda}(\xi)$ est localement borné, indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine.*

2) $\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \hat{\Lambda}(\xi)\right|\leq\frac{C_\nu}{|\xi|^{(|\nu|-1)d}}$ *pour* $|\nu|\geq 1$, $|\xi|\geq R>1$ *où* $0<d\leq 1$

3) $\left|\hat{\Lambda}(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \hat{h}_\nu(\xi)\right|\leq\frac{B_\alpha}{|\xi|^{(|\alpha|-1)d}}$ *pour* $|\alpha|\geq 1$, $|\xi|\geq R>1$ *tout* $\nu\geq 0$

4) $\hat{\Lambda}(\xi)=\sqrt[q]{\hat{\lambda}(\xi)}$ *où* $\begin{cases} \hat{\lambda}(\xi) \text{ est un polynôme } \geq 0 \\ >1 \text{ pour } |\xi|\geq R \\ \text{degré de } \hat{\lambda}(\xi)\leq q \ (q\geq 2). \end{cases}$

Alors, $H\Lambda-\Lambda H$, $H^*\Lambda-\Lambda H^*$, $(H^*-H^\#)\Lambda$, $\Lambda(H^*-H^\#)$, $(H_1\circ H_2-H_1H_2)\Lambda$ $\Lambda(H_1\circ H_2-H_1H_2)$ sont des opérateurs bornés de L^2 dans lui-même.

Maintenant nous voulons montrer que les opérateurs $H_i=P_i+iQ_i$ vérifient (3). Pour cela, développons $\lambda_i(x,t,\xi)$ suivant les puissances de $\sigma_{ij}=a_{ij}(x,t)-a_{ij}(0,0)$, et regardons tous les symboles ci-dessus comme des fonctions de deux variables $(\xi;\sigma)$.

Alors on peut constater que

i) ces symboles admettent des développements sous la forme énoncée dans le théorème ci-dessus.

ii) la condition (3) est vraie.

En effet, écrivons un des symboles sous la forme $\hat{h}(\xi;\sigma)=\sum_{\nu\geq 0}\sigma^\nu\hat{h}_\nu(\xi)$. Pour notre but, il suffit de vérifier les deux inégalités:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha[\hat{\Lambda}(\xi)\hat{h}(\xi;\sigma)]\right|\leq\frac{B'_\alpha}{|\xi|^{\frac{1}{2}(|\alpha|-1)}} \qquad \text{pour } |\xi|\geq 1,\ \ |\alpha|\geq 1. \tag{I$_1$}$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\beta\hat{h}(\xi;\sigma)\right|\leq\frac{B_\beta}{|\xi|^{\frac{1}{2}|\beta|}} \qquad \text{pour } |\xi|\geq 1,\ \ |\beta|\geq 0. \tag{I$_2$}$$

Or, on a

$$\left|\frac{\partial}{\partial \zeta_j}\lambda_i(x,t,\zeta)\right|_{\zeta=\xi+\vartheta}\leq C \qquad \text{pour } |\vartheta_i|\leq c|\xi|^{\frac{1}{2}},\quad |\xi|\geq 1$$

où C et c sont des constantes convenablement choisies. En appliquant la formule de Cauchy à $\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lambda_i(x,t,\zeta)$, on a (3).

En résumé,

Lemme 2.1. *L'opérateur C_1 est majoré sous la forme:*

$$\|C_1u(x,t)\|^2_{L^2(R^n)}\leq C\left(\left\|\frac{d}{dt}u\right\|^2+\|\Lambda u\|^2+\|u\|^2\right)$$

où C est une constante.

3. *Inégalité pour* $\int_0^h\varphi_n^2\left\|\left(P\pm\sqrt{-\Delta'+\frac{\partial}{\partial x_n}}\right)u\right\|^2dt$. Nous allons *partir d'une variante du Lemme* 2.1 *de* [4] (*et du Lemme* 2 *de* [2]).

Lemme 3.1. *Supposons que $u(t)$, $0\leq t\leq h$, $P(t)$, $Q(t)$, $\varphi_n(t)$ satisfassent tous les hypothèses du Lemme* 2.1 *de* [4]. *Alors on a*

$$\begin{aligned}J_n&=\int_0^h\varphi_n^2\left\|\left(\frac{d}{dt}+(P+iQ)\Lambda\right)u\right\|^2dt\\ &\geq M(n)n\int_0^h\varphi_n^2\|u\|^2dt+\frac{k}{n}\int_0^h\varphi_n^2\left\{\left\|\frac{d}{dt}u\right\|^2+\|\Lambda u\|^2\right\}dt\end{aligned}\tag{3.1}$$

où $M(n)$ est une suite tendant vers$+\infty$ avec n, et k est une constante >0.

Preuve. Limitons-nous à éxpliciter les modifications à faire. D'abord par l'inégalité

$$(\rho-1)^2+\frac{1}{n}\geq\frac{2}{3}\cdot\frac{\rho^2+1/2}{n}\qquad\text{pour}\quad n\geq 2\tag{I_3}$$

il n'est pas nécessaire que nous prenons " une suite partielle des $\varphi_n(t)$". De plus, en utilisant l'inégalité à priori

$$|a+b|^2\geq\frac{1}{\sigma}|a|^2-\frac{1}{\sigma-1}|b|^2\qquad\text{où}\quad\sigma>1,\tag{I_4}$$

on peut améliorer l'évaluation pour $\int_0^h\|(\varphi_nu)'\|^2dt$. Si l'on utilise ces deux faits, (3.1) découle immédiatement. c.q.f.d.

D'autre part, outre les hypothèses du Lemme 3.1, si l'on suppose que le symbole $\sigma(P)$ soit positif pour $|\xi|\geq 1$, on est privilégié d'user l'inégalité suivante.

$$J_n\geq\sigma\int_0^h\varphi_n^2\left\{\left\|\frac{d}{dt}u\right\|^2+\|\Lambda u\|^2+n\|u\|^2\right\}dt\tag{3.2}$$

(voir Lemme 2.2 de [4]).

Alors on al la

Proposition 3.1. *Posons*

$$K_n^{\pm}=\int_0^h\varphi_n^2\left\|\left(P\pm\sqrt{-\Delta'+\frac{\partial}{\partial x_n}}\right)u\right\|^2dt\tag{3.3}$$

où l'un des $\sigma(P_i)$ $(i=1,3)$ est positif pour $|\xi|\geq 1$. Alors on a deux sortes des majorations.

$$K_n^{\pm}\geq \sigma M(n)n\int_0^h \varphi_n^2\left\{\left\|\frac{d}{dt}u\right\|^2+\|\Lambda u\|^2+n\|u\|^2\right\}dt, \tag{3.4}$$

$$K_n^{\pm}\geq \frac{k}{n}\sigma\int_0^h \varphi_n^2\left\{\left\|\left(\frac{d}{dt}\right)^2 u\right\|^2+\left\|\left(\frac{d}{dt}\right)\Lambda u\right\|^2+\|\Lambda^2 u\|^2\right\}dt. \tag{3.5}$$

Montrons ces inégalités pour (2.7). Si l'on tient compte du Lemme 2.1, ces inégalités ne sont que des conséquences immédiates des (3.1) et (3.2).

Finalement, on a la majoration suivante,

$$\begin{aligned} L_n&=\int_0^h \varphi_n^2\left\|\left(P+\sqrt{-\Delta'+\frac{\partial}{\partial x_n}}\right)\left(P-\sqrt{-\Delta'+\frac{\partial}{\partial x_n}}\right)u\right\|^2 dt \\ &\geq M(n)\rho\int_0^h \varphi_n^2\sum_{i+|\nu'|\leq 3}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu'}u\right\|^2 dt \end{aligned} \tag{3.6}$$

où ρ est une constante positive.

D'autre part, compte tenu de (2.2)

$$L_n\leq c\int_0^h \varphi_n^2\sum_{i+|\nu'|\leq 3}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu'}u\right\|^2 dt. \tag{3.7}$$

Ce qui est absurde. Cette contradiction prouve que $u(x,t)$ doit s'annuler identiquement dans un voisinage de l'origine. Nous avons donc prouvé notre THEOREME.

Références

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund: Singular integral operators and differential equations, Amer. Jour. Math., **79**, 901–921 (1957).

[2] A. P. Calderón: Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. Jour. Math., **80**, 16–36 (1958).

[3] S. Mizohata: Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., ser. A, **31**, 219–239 (1958).

[4] ——: Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre, Proc. Japan Acad., **34**, 687–692 (1958).