80. La Solvabilité de Certains Equations sur les Nombres Ordinaux Transfinis. IV

Par Sôkiti NAGAI
Institut de Mathématiques, l'Université d'Iwaté, Morioka, Japon
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1961)

19. Dans la suite,[*] nous considérons le sous-cas (viii). Pour ce cas, nous pouvons poser

$$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon,\ \varepsilon=\eta^{l_1-1}\omega^{\beta_k}\mu_k+\cdots\ (2\leq k\leq s), \tag{19.1}$$

où $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2(r>s)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$, $\lambda_{s+1}=\lambda_1\mu_0$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}$ et $\lambda_i=\lambda_{s+i}$ $(2\leq i\leq r-s)$, $\alpha_{r-s+j}=\beta_j(1\leq j\leq k-1)$, $\lambda_{r-s+1}=\lambda_1\nu_2$, $\lambda_{r-s+j'}=\lambda_{j'}(2\leq j'\leq k-1)$, $\alpha_0=\alpha_1(l_1-1)+\beta_k$, $\alpha_{r-s+k}<\beta_k<\alpha_{r-s+k-1}$ et $\bar{\lambda}=\mu_k$.

Alors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$\begin{aligned}\xi=&\{\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_2}((\sigma)_s^k+\mu_0-1)+\eta^{l_2-1}(\eta)_{r-s}^1\}\\&+\sum_{i=3}^{t}\{\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma+\mu_0-1)+\eta^{l_i-1}(\eta)_{r-s}^1\},\end{aligned} \tag{19.2}$$

où $2\leq t$, $l_2=l_1-1$, $l_{i-1}>l_i$ $(3\leq i\leq t)$, pour m tel que $\beta_1 m=\alpha_1 g$ (donc $m>g$) et $l_1 m+g=l$, et a tel que $\mu_1 a=\lambda_1\nu$. Encore, s'il existe au moins un $i\,(\geq 3)$ tel que $l_i=l_{i-1}-1$ et $\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma>(\eta)_r^{r-s+1}$, (19.2) ne coïncide pas avec la représentation de ξ par rapport à η.

De même que le sous-cas (v), nous avons la

Proposition L_4. *Si l'équation (E^*) remplit les conditions (L_4') qui coïncident avec (L_1'), elle a au moins des solutions ξ, η satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$\begin{aligned}\xi=&\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_2)}((\sigma)_s^k+\mu_0-1)\\&+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_2)-1}(\eta)_{r-s}^1\}+\sum_{i=3}^{t}\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)}(\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma+\mu_0-1)\\&+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)-1}(\eta)_{r-s}^1\},\end{aligned} \tag{L_4''}$$

où $2\leq t\leq\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $n_1-n_2=1$, $\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]>n_1-n_t$, $\dfrac{h}{d}=\dfrac{n_1}{m_1}-\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1=\omega^\pi d+\rho$, $\beta_1=\omega^\pi h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^\pi(d-h)+\rho=\alpha_{s+1}$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2\,(r>s)$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}$ *et* $\lambda_i=\lambda_{s+i}$ $(2\leq i\leq r-s)$, $\alpha_{r-s+j}=\beta_j\,(1\leq j\leq k-1)$, $\alpha_{r-s+k}<\beta_k$, $\lambda_{r-s+1}=\lambda_1 b_2$, $\lambda_{r-s+j'}=\lambda_{j'}$ $(2\leq j'\leq k-1)$, $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}=\dfrac{b_1}{a_1}$ *et* $\mu_0=\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}$. *Encore, s'il existe au moins un* $i(\geq 3)$ *tel que* $n_i=n_{i-1}-1$ *et* $\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma>(\eta)_r^{r-s+1}$, ξ *ne coïncide pas avec sa représentation par rapport à* η,

20. Le sous-cas (ix). Pour ce cas, pour que ξ est représentable

---

[*] S. Nagai: La solvabilité de certains équations sur les nombres ordinaux transfinis. I, Proc. Japan Acad., **37**, 121-126; II, ibid., 175-178; III, ibid., 276-281 (1961).

finiment ou presque finiment par rapport à η, il faut que ξ est développable comme suit

$$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon,\quad \varepsilon=\omega^{\alpha_1(l_1-1)}\lambda_{s+1}+\cdots, \tag{20.1}$$

où $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2\ (r>s)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$, $\lambda_{s+1}=\lambda_1\mu_0$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}$ et $\lambda_i=\lambda_{s+i}\ (2\leq i\leq r-s)$, $\alpha_{r-s+j}=\beta_j\ (1\leq j\leq s)$, $\lambda_{r-s+1}=\lambda_1\nu_2$ (donc, si $r=2s$, $\nu_2=\mu_0$), $\lambda_{r-s+j'}=\lambda_{j'}\ (2\leq j'\leq s)$, $\alpha_0=\alpha_1(l_1-1)$ où $l_1\geq 2$ et $\bar{\lambda}=\lambda_{s+1}$.

Dans ce cas, il existe des couples ξ, η représentables finiment et aussi presque finiment. Voici d'abord la

(I) L'existence des couples ξ, η représentables finiment.

Alors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$\begin{aligned}\xi=&\{\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_2}(\mu_0-1)+\eta^{l_2-1}(\eta)_{r-s}^1\}\\&+\sum_{i=3}^{t}\{\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma+\mu_0-1)+\eta^{l_i-1}(\eta)_{r-s}^1\},\end{aligned} \tag{20.2}$$

où $2\leq t$, $l_2=l_1-1$, $l_{i-1}>l_i\ (3\leq i\leq t)$, pour m tel que $\beta_1 m=\alpha_1 g$ (donc $m>g$) et $l_1m+g=1$, et a tel que $\mu_1 a=\lambda_1\nu$. Encore, s'il existe au moins un $i\ (\geq 3)$ tel que $l_i=l_{i-1}-1$ et $\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma\geq(\eta)_r^{r-s+1}$ (c'est-à-dire, $\nu_i\geq\nu_2$), (20.2) ne coïncide pas avec la représentation de ξ par rapport à η.

De même que le sous-cas (v), nous avons la

Proposition L_5. *Si l'équation* (E^*) *remplit les conditions* (L_5') *qui coïncident avec* (L_1'), *elle a au moins des solutions* ξ, η *satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$\begin{aligned}\xi=&\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_2)}(\mu_0-1)\\&+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_2)-1}(\eta)_{r-s}^1\}+\sum_{i=3}^{t}\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)}(\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma+\mu_0-1)\\&+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)-1}(\eta)_{r-s}^1\},\end{aligned} \tag{L_5''}$$

où $2\leq t\leq\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $n_1-n_2=1$, $\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]>n_1-n_t$, $\dfrac{h}{d}=\dfrac{n_1}{m_1}-\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1=\omega^\pi d+\rho$, $\beta_1=\omega^\pi h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^\pi(d-h)+\rho=\alpha_{s+1}$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2\ (r>s)$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}$ *et* $\lambda_i=\lambda_{s+i}$ $(2\leq i\leq r-s)$, $\alpha_{r-s+j}=\beta_j\ (1\leq j\leq s)$, $\lambda_{r-s+1}=\lambda_1 b_2$ (*si* $r=2s$, $b_2=\mu_0$), $\lambda_{r-s+j'}=\lambda_{j'}$ $(2\leq j'\leq s)$, $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}=\dfrac{b_1}{a_1}$ *et* $\mu_0=\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}$. *Encore, s'il existe au moins un* i (≥ 3) *tel que* $n_i=n_{i-1}-1$ *et* $\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma\geq(\eta)_r^{r-s+1}$ (*c'est-à-dire*, $b_i\geq b_2$), ξ *ne coïncide pas avec sa représentation par rapport à* η.

Puis, nous discutons la

(II) L'existence des couples ξ, η représentables presque finiment.

Alors, il suffit de considérer ξ tel que

$$\xi=\xi'+(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu+\sigma), \tag{20.3}$$

où ξ' satisfait à $l_i=l_{i-1}-1\ (2\leq i\leq t)$ et $l_t=1$ dans (20.2), ou bien

$$\xi=\xi'+\eta(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu+\sigma+\mu_0),$$

où ξ' satisfait à $l_i=l_{i-1}-1\ (2\leq i\leq t)$ et $l_t=2$ dans (20.2), ou bien

$$\xi=\eta^2(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta\mu_0.$$

En utilisant le lemme 7, pour que ξ est représentable presque finiment par rapport à η, il est nécessaire au moins que les deux relations suivantes sont accomplies:

$$\begin{aligned}(20.4)\qquad &\xi^m a_1+\xi^{m-1}a_0+\xi^{m-2}a_0+\cdots+\xi^{m-(u-1)}a_0\\ &=\eta^n b_1+\eta^{n-1}\mu_0+\eta^{n-2}\mu_0+\cdots+\eta^{n-(v-1)}\mu_0,\end{aligned}$$

où $\frac{\mu_1}{\lambda_1}=\frac{b_1}{a_1}=\frac{\mu_0}{a_0}$ pour m convenablement choisi, et en précisant (20.3), ξ est développable comme suit

$$(20.5)\qquad \xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_1-1}\mu_0+\eta^{l_1-2}\mu_0+\cdots+\eta\mu_0 \quad (l_1\geq 2),^{1)}$$

où $r=uz$, $r'=l_1r+s=vz=(l_1u+v')z$ $(s=v'z,\ 0<v'<u,\ (v',u)=1)$. Or, pour que (20.5) satisfait à (20.4), il faut et il suffit que les deux relations suivantes sont accomplies:

$$\begin{aligned}(20.6)\qquad &\mu_i=\mu_{i+z}=\mu_{i+2z}=\cdots=\mu_{i+(v'-1)z}\\ &\quad=\lambda_i=\lambda_{i+z}=\lambda_{i+2z}=\cdots=\lambda_{i+(v'-1)z}=\cdots=\lambda_{i+(u-1)z}\ (2\leq i\leq z),\\ &\mu_{1+z}=\mu_{1+2z}=\cdots=\mu_{1+(v'-1)z}=\mu_1a_0\\ &\quad=\lambda_{1+z}=\lambda_{1+2z}=\cdots=\lambda_{1+v'z}(=\lambda_1\mu_0)=\cdots=\lambda_{1+(u-1)z}=\lambda_1\mu_0,\\ &\mu_1a_1=\lambda_1b_1\left(\text{donc, }\frac{\mu_1}{\lambda_1}=\frac{b_1}{a_1}=\frac{\mu_0}{a_0}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(20.7)\qquad &\bar{\alpha}+\beta_i=\alpha_i\ (1\leq i\leq s),\ \alpha_j=\beta_1+\alpha_{s+j}\ (1\leq j\leq r-s)\ \text{et}\\ &\alpha_{r-s+k}=\beta_k\ (1\leq k\leq s).\end{aligned}$$

Encore, il existe une relation suivante:

$$(20.8)\qquad \alpha_1v'=\beta_1u,\ \text{c'est-à-dire, } dv'=hu.$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}(20.9)\qquad &\sum_{i=1}^{t}\{\xi^{m^{(i)}}a^{(i)}+\xi^{m^{(i)}-1}a_0+\xi^{m^{(i)}-2}a_0+\cdots+\xi^{m^{(i)}-(u-1)}a_0\}\\ &=\sum_{i=1}^{t}\{\eta^{l^{(i)}}b^{(i)}+\eta^{l^{(i)}-1}\mu_0+\eta^{l^{(i)}-2}\mu_0+\cdots+\eta^{l^{(i)}-(l_1u+v'-1)}\mu_0\},\end{aligned}$$

où $r>s$, $t\left(\leq\left[\frac{m^{(1)}}{u}\right]\right)$ sont arbitraires, $m^{(i)}\ (\geq(t-i+1)u)\ (1\leq i\leq t)$ $(m^{(j-1)}>m^{(j)}\ (2\leq j\leq t))$ sont choisis de façon que $\beta_1m^{(i)}=\alpha_1g^{(i)}$ (donc $m^{(i)}>g^{(i)}$) et $l_1m^{(i)}+g^{(i)}=l^{(i)}$, et $a^{(i)}\ (1\leq i\leq t)$ sont choisis de façon que $\mu_1a^{(i)}=\lambda_1b^{(i)}$. Par suite, en revoyant (20.9) comme l'équation (E*), nous avons la

Proposition M. *Si l'équation* (E^*) *remplit les conditions suivantes*:

(M′) $F(\xi)$ *est similaire rationnellement à* $G(\eta)$ *où* $e_2=1$ *pour* $F(\xi)$ *et* $G(\eta)$,

elle a au moins des solutions ξ, η *satisfaisant aux conditions suivantes*:

$$(\mathrm{M}'')\qquad \xi=\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+b_2)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-1}b_2+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-2}b_2+\cdots+\eta^2b_2+\eta b_2,$$

où $\frac{h}{d}=\frac{n_1}{m_1}-\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$, $\left[\frac{n_1}{m_1}\right]\geq 2$,[2] $\alpha_1=\omega^\kappa d+\rho$, $\beta_1=\omega^\kappa h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^\kappa(d-h)+\rho$ $=\alpha_{s+1}$, $r>s$ *et* $\frac{s}{r}=\frac{v'}{u}=\frac{h}{d}$ $((v',u)=1)$, (20.6) (*où* $a_0=a_2$ *et* $\mu_0=b_2$) *et* (20.7).

1) Dans la section 21, on voit que (20.5) contient le cas où $l_1=1$.

2) D'après la section 21, il résult que nous pouvons enlever cette condition.

21. Le sous-cas (x). Pour ce cas, nous pouvons poser

(21.1) $$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0).$$

Donc, ξ ne peut être que représentable presque finiment par rapport à η, car il faut $s<r$ et la forme normale de ξ a $(r+s)$ termes. Or, pour que ξ est représentable presque finiment par rapport à η, il est nécessaire que $l_1=1$, c'est-à-dire,

(21.2) $$\xi=\eta(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0).$$

Alors, ξ est représentable presque finiment par rapport à η et ce cas est contenu dans le sous-cas (ix) comme le cas spécial où $\left[\frac{n_1}{m_1}\right]=1$ (ou $l_1=1$). Par suite, nous pouvons enlever la condition $\left[\frac{n_1}{m_1}\right]\geq 2$ dans (M″) pour la proposition M.

22. Conclusion. D'après les résultats que les propositions de H_1 à M indiquent, nous avons toutes les équations (E*) solvables et en conséquent, les théorèmes suivants.

Théorème 1. *Si $q<p$ ou bien $a_{p+1}\neq b_{q+1}$, l'équation (E) n'a aucune solution limite $\varphi=\xi$, $\psi=\eta$.*

Théorème 2. *Si $q=p$ et $a_{p+1}=b_{q+1}$, pour que l'équation (E) a la solution limite $\varphi=\xi$, $\psi=\eta$, il faut et il suffit que $F(\xi)$ est similaire à $G(\eta)$, c'est-à-dire,*

(i) si e_1 et c_1 sont les nombres naturels (où $e_1=1$ entraîne $c_1\geq 2$), l'équation (E) a la solution H_1'' (où $t=1$), ou

(ii) si e_1 est un nombre naturel et $c_1(>1)$ est un nombre fractionnaire, l'équation (E) a la solution H_2'' (où $t=1$), ou

(iii) si $e_1(\geq 2)$[3] est un nombre naturel et $c_1(<1)$ est un nombre fractionnaire, l'équation (E) a la solution I_1'' (où $t=1$), ou bien

(iv) si $e_1(>1)$ est un nombre fractionnaire, l'équation (E) a les solutions J'', J''', K_1'', K_2'', K_3'' et K_4'' (où $t=1$).

Théorème 3. *Si $q=tp$ (où $t(\geq 2)$ est un nombre naturel) et $a_{p+1}=b_{q+1}$, pour que l'équation (E) a la solution limite $\varphi=\xi$, $\psi=\eta$, il faut et il suffit que $F(\xi)$ est presque similaire à $G(\eta)$ et en même temps une des conditions suivantes est satisfaite, c'est-à-dire,*

(i) e_1 est un nombre naturel tel que $2\leq t\leq e_1$ et $e_t<e_1$, et c_1 est un nombre naturel, et alors, l'équation (E) a la solution H_1'', ou

(ii) e_1 est un nombre naturel tel que $2\leq t\leq e_1$ et $e_t<e_1$, et $c_1(>1)$ est un nombre fractionnaire, et alors, si $e_2\geq 2$, l'équation (E) a la solution H_2'', et si $e_2=1$ (où $t=e_1$ entraîne $e_2=1$), l'équation (E) a la solution H_3'', ou

(iii) e_1 est un nombre naturel tel que $2\leq t\leq e_1$ et $e_t<e_1$, et $c_1(<1)$ est un nombre fractionnaire, et alors, si $e_2\geq 2$, l'équation (E) a la solution I_1'', et si $e_2=1$ (où $t=e_1$ entraîne $e_2=1$), l'équation (E) a la

3) Il n'existe pas $e_1=1$ dans ce cas, car $\xi>\eta$.

solution I_2'', *ou bien*

(iv) $e_1(>1)$ *est un nombre fractionnaire tel que* $2 \leq t \leq [e_1]+1$ *et* $e_t \leq [e_1]$, *et alors, si* $e_t = [e_1]$ (*où* $t=[e_1]+1$ *entraîne* $e_t=[e_1]$), *l'équation* (E) *a la solution* J'', *si* $e_t<[e_1]$ *et* $e_2 \geq 2$, *l'équation* (E) *a les solutions* J'', J''', K_1'', K_2'', K_3'' *et* K_4'', *et si* $e_t<[e_1]$ *et* $e_2=1$, *l'équation* (E) *a les solutions* J'', J''', K_1'', K_2'', K_3'', K_4'', L_1'', L_2'', L_3'', L_4'' *et* L_5''.

Théorème 4. *Si* $q=tp$ (*où* $t(>1)$ *est un nombre fractionnaire*) *et* $a_{p+1}=b_{q+1}$, *pour que l'équation* (E) *a la solution limite* $\varphi=\xi$, $\psi=\eta$, *il faut et il suffit que* $F(\xi)$ *est similaire rationnellement à* $G(\eta)$ *et* $e_2=1$ *pour* $F(\xi)$ *et* $G(\eta)$, *et alors, l'équation* (E) *a la solution* M''.