44. *Zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete, I.*

Von Yûsaku KOMATU.
Institut für Mathematik, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., May 12, 1945.)

In der Theorie der konformen Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten werden gewisse Gebiete normaler Gestalt, etwa konzentrische Kreisringe, Parallel-, Kreisbogen- oder Radialschlitzgebiete usw., oft als Normalgrundgebiete aufgenommen. Ist ein beliebiges zweifach zusammenhängendes Gebiet vorgegeben, so weist die Abbildung auf das eine von solchen Gebieten unter anderem verschiedene besondere Extremaleigenschaften auf. Darauf hin, wenn wir als vorgegebenes Grundgebiet einen konzentrischen Kreisring nehmen, so mag die Abbildung von ihm auf ein anderes solcher Gebiete als die Extremalabbildung in Frage kommen. Um verschiedene Schranken der Extremalprobleme bezüglich irgendeiner Familie der Abbildungsfunktionen quantitativ zu bestimmen, sollen wir also zuerst die expliziten Gestalten solcher speziellen Abbildungsfunktionen festsetzen. In den vorliegenden und nachfolgenden Noten soll der Verfasser sich mit einer systematischen Herleitung der expliziten Ausdrücke solcher speziellen Funktionen, der Schrankenbestimmung verschiedener Verzerrungssätze sowie den verwandten Problemen für die in einem Kreisringe schlichte Abbildungsfunktionenfamilie beschäftigen[1].

A. Eininge spezielle Abbildungsfunktionen.

1. *Verallgemeinerte Greensche Funktion eines Kreisringes.*

Wir betrachten zuerst eine Funktion $f(z;z_\infty)$, deren reeller Teil die Greensche Funktion mit dem Pol z_∞ von einem vorgegebenen konzentrischen Kreisringe R: $q<|z|<1$ liefert. Sie verhält sich, von einem einzigen inneren Punkte z_∞ $(q<|z_\infty|<1)$ abgesehen, überall in R analytisch, aber dort vieldeutig, und läßt sich bekanntlich[2] darstellen etwa in der Gestalt

$$f(z;z_\infty)=\lg\frac{\sigma_3\left(i\lg\dfrac{z_\infty z}{q}\right)}{\sigma\left(i\lg\dfrac{z}{z_\infty}\right)}+\left(\frac{1}{\lg q}+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\lg(q^{-\frac{1}{2}}|z_\infty|)\lg z+B(z_\infty),$$

1) In bezug auf betreffende Probleme für die Parallelschlitzabbildung vgl. man etwa Y. Komatu, Die Geschwindigkeitspotentiale und die Kutta-Joukowskischen Bedingungen für die Strömungen in vielfach zussammenhängenden Gebieten, II. Proc. **21** (1945), 83–93; Über Verzerrungen bei der konformen Parallelschlitzabbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten. Proc. **21** (1945), 1–5.

2) Vgl. etwa die in Anm. 1) genannte erste Note.

worin $B(z_\infty)$ eine übrigens bis auf eine rein imaginäre additive Konstante wohl bestimmte Größe bedeutet und zwar etwa durch den Ausdruck

$$B(z_\infty)=\left(\frac{1}{\lg q}+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\lg\left(q^{-\frac{1}{2}}\,|z_\infty|\right)\lg q^{-\frac{1}{2}}$$
$$-\lg\left(iq^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2\right)-\frac{2\eta_1}{\pi}\lg\left(q^{-\frac{1}{2}}|z_\infty|\right)\lg\frac{z_\infty}{\bar{z}_\infty}$$

gegeben wird. Die hier auftrenden Bezeichnungen aus der Weierstraßischen Theorie der elliptischen Funktionen beziehen sich alle auf diejenigen, welche die primitiven Perioden

$$2\omega_1=2\pi \quad \text{und} \quad 2\omega_3=2i\lg\frac{1}{q}$$

besitzen. Diese Funktion läßt sich aber weiter in eine bequemere Gestalt umfor men. Wir können sie nämlich, mittels der Legendreschen Relation

$$\frac{\pi i}{2}=\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=i\eta_1\lg\frac{1}{q}-\pi\eta_3$$

und nach Vernachlässigung einer unbedeutenden rein imaginären additiven Konstante, in eine mehr übersichtliche Form

$$f(z;z_\infty)=\lg\frac{\sigma(i\lg z_\infty)\sigma_3\left(i\lg\frac{\bar{z}_\infty z}{q}\right)}{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)\sigma_3\left(i\lg\frac{\bar{z}_\infty}{q}\right)}+2i\eta_3\lg\left(q^{-\frac{1}{2}}\,|z_\infty|\right)\frac{\lg z}{\lg q}$$

bringen.

Führen wir nun eine Funktion $f(z;z_\infty;\alpha_0,\alpha_1)$ mit beiden reellen Parametern α_0 und α_1 ein durch die Gleichung

$$f(z;z_\infty;\alpha_0,\alpha_1)=f(z;z_\infty)-\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\lg q}\lg z+\alpha_1,$$

so stellt sie diejenige Funktion dar, deren reeller Teil gerade die sogenannte verallgemeinerte Greensche Funktion mit den Randwerten α_0 und α_1 liefert. Die eindeutig bestimmte reelle Funktion $\Re f(z;z_\infty;\alpha_0,\alpha_1)$ nimmt nämlich die konstanten Randwerte α_0 und α_1 auf $|z|=q$ bzw. $|z|=1$, und weist die Harmonizität und Singularität derselben Art wie die (gewöhnliche) Greensche Funktion $\Re f(z;z_\infty)\equiv\Re f(z;z_\infty;0,0)$ selbst auf.

Mit Hilfe der soeben definierten Funktion können wir, bei beliebiger Vorgabe beider positiven Konstanten e^{α_0} und e^{α_1} sowie einer beliebigen komplexen Zahl z_∞ mit $q<|z_\infty|<1$, eine in R analytische (aber im allgemeinen vieldeutige) Funktion $f^*(z;z_\infty;e^{\alpha_0},e^{\alpha_1})$ ohne weiteres konstruieren, welche sich bis auf einen einzigen Pol z_∞ erster Ordnung dort überall regulär verhält und deren Absolutbetrag auf $|z|=q$ und $|z|=1$ gleich den konstanten Werten e^{α_0} bzw. e^{α_1} ist. Sie läßt sich nämlich einfach durch den Ausdruck

$$f^*(z;z_\infty;e^{a_0},e^{a_1}) = \exp f(z;z_\infty;a_0,a_1)$$

$$= e^{a_1} z^{(2i\eta_3 \lg (q^{-\frac{1}{2}}|z_\infty|) - (a_1-a_0))/\lg q} \frac{\sigma(i\lg z_\infty)\sigma_3\left(i\lg \frac{\bar{z}_\infty z}{q}\right)}{\sigma\left(i\lg \frac{z}{z_\infty}\right)\sigma_3\left(i\lg \frac{\bar{z}_\infty}{q}\right)}$$

liefern, und bestimmt sich offenbar, von einem konstanten Faktor mit dem Absolutbetrag Eins abgesehen, ganz eindeutigerweise. Sie genügt sogar ersichtlich der Identität

$$f^*(z;z_\infty;e^{a_0},e^{a_1}) \equiv e^{a_0} f^*(z;z_\infty;1,e^{a_1-a_0})\,.$$

Bei einer speziellen Substitution der unabhängigen Veränderlichen: $\lg z$
$\lg z + 2\pi i$ bekommt diese Funktion, wie man leicht übersehen kann, den Faktor

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{\lg q}(\lg|z_\infty| - (a_1 - a_0))\right),$$

dessen Ablutbetrag natürlich gleich Eins ist, und dessen Argument gerade mit dem Periodizitätsmodul von $f(z;z_\infty;a_0;a_1)$, d. h. mit dem Werte des Integrals

$$\oint df(z;z_\infty;a_0,a_1)\,,$$

auf einem in R verlaufenden und beide Randkomponenten voneinander trennenden Wege erstreckt, übereinstimmt.

2. *Monodromiebedingung für die Kreisbogenschlitzabbildung.*

Zwei voneinander verschiedene Punkte z_∞ und z_0 seien im Innern vom Grundgebiete R beliebig vorgegeben. Wir betrachten nun diejenige Funktion

$$\omega = \omega_k(z) \equiv \omega_k(z;z_\infty,z_0)\,,$$

welche den Ring R auf ein Kreisbogenschlitzgebiet abbildet, das durch Aufschlitzung der vollen ω-Ebene längs zwei Kreisbogen um $\omega = 0$ entsteht, und sogar den Normierungsbedingungen

$$\omega_k(z_0) = 0\,,\quad \omega_k(z_\infty) = \infty\,,\quad \mathrm{Res}\,[z_\infty;\,\omega_k] = 1$$

genügt. Sie bestimmt sich bekanntlich durch die angegebenen Nebenbedingungen ganz eindeutigerweise[3].

Nun bemerken wir, daß jeder Zweig der Funktion

$$\lg\left(\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}\,\frac{z-z_\infty}{1-\bar{z}_\infty z}\,\omega_k(z)\right)$$

sich im ganzen R regulär und sogar *eindeutig* verhält. Die Regularität ist nämlich ohne weiteres ersichtlich, und jeder Zweig kann übrigens höchstens einen rein imaginären Periodizitätsmodul besitzen. Aber die letztgenannte Größe

3) Betreffs dieser Tatsache werden wir wieder am Anfang des nächsten Paragraphen näher eingehen.

beträgt wirklich gerade Null. Um dies zu zeigen, genügt es ja zu beweisen, daß diese Funktion bei einer besonderen Substitution $\lg z \,|\, \lg z + 2\pi i$, etwa längs $|z|=1$, invariant bleibt. Dabei transformieren sich aber die betreffenden Summanden wie im folgenden:

$$\lg \frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0} \,\Big|\, \lg \frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0} - 2\pi i, \quad \lg \frac{z-z_\infty}{1-\bar{z}_\infty z} \,\Big|\, \lg \frac{z-z_\infty}{1-\bar{z}_\infty z} + 2\pi i;$$

$$\lg \omega_k(z) \,|\, \lg \omega_k(z),$$

woraus tatsächlich die behauptete Invarianz folgt.

Bezeichnen wir nun mit $|\omega| = m_0$ und $|\omega| = m_1$ die Kreise, welche die Bildschlitze von $|z| = q$ bzw. $|z| = 1$ bei der Abbildung $\omega = \omega_k(z)$ tragen, so sind die Randwerte des reellen Teils der betreffenden soeben betrachteten Funktion gleich

$$\Re \lg \left(\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0} \frac{z-z_\infty}{1-\bar{z}_\infty z} \omega_k(z) \right) = \begin{cases} \lg m_0 + \lg \left| \dfrac{1-\bar{z}_0 q e^{i\theta}}{q e^{i\theta}-z_0} \dfrac{q e^{i\theta}-z_\infty}{1-\bar{z}_\infty q e^{i\theta}} \right| & (z = q e^{i\theta}), \\ \lg m_1 & (z = e^{i\theta}). \end{cases}$$

Wir können also auf sie Monodromiebedingung[4] anwenden, welche durch jede in R reguläre und *eindeutige* Funktion erfüllt wird. So erhalten wir die Beziehung

$$\lg m_1 = \lg m_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \left| \frac{1-\bar{z}_0 q e^{i\theta}}{q e^{i\theta}-z_0} \frac{q e^{i\theta}-z_\infty}{1-\bar{z}_\infty q e^{i\theta}} \right| d\theta .$$

Das rechts stehende Integral läßt sich aber leicht, etwa mittels der Gaußischen Mittelwertsatzes, explizit ausrechnen, und so ergibt sich eine merkwürdige Relation

$$\frac{m_1}{m_0} = \left| \frac{z_\infty}{z_0} \right|$$

3. *Herleitung der Abbildungsfunktion $\omega_k(z; z_\infty, z_0)$ mittels der verallgemeinerten Greenschen Funktion.*

Um die Gestalt der im letzten Paragraphen definierten Abbildungsfunktion $\omega_k(z) \equiv \omega_k(z; z_\infty, z_0)$ explizit zu bestimmen, bemerken wir zuvor, daß sie sich schon durch ihre Normierungsbedingungen an z_∞ und z_0 nebst der Bedingung $\omega_k(z_0) \gtrless 0$, die Konstanz ihres Absolutbetrages auf beiden Randkomponenten sowie das Verschwinden ihrer Umlaufszahl etwa längs $|z| = 1$, d. h.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} d \lg \omega_k(z) = 0 ,$$

ganz charakterisieren läßt.

Es sei nämlich $\omega^*(z)$ eine beliebige Funktion, die den angegebenen Bedingungen genügt. Das Quotient $Q(z) = \omega^*(z)/\omega_k(z)$ verhält sich dann an jedem

4) Vgl. z. B. Y. Komatu, Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 25 (1943), 1–42.

Punkte von R regulär und verschwindet nirgends; somit stellt die Größe $\lg|Q(z)|$ eine regulär harmonische Funktion mit den konstanten Randwerten $\lg \frac{M_0}{m_0}$ auf $|z| = q$ und $\lg \frac{M_1}{m_1}$ auf $|z| = 1$ dar; hierbei bedeuten M_0 und M_1 die Randwerte von $|\omega^*(z)|$ auf $|z| = q$ bzw. $|z| = 1$. Wir erhalten also nacheinander

$$\lg|Q(z)| = \lg \frac{M_1}{m_1} + \left(\lg \frac{M_0}{m_0} - \lg \frac{M_1}{m_1}\right)\frac{\lg|z|}{\lg q},$$

$$Q(z) = e^{i\lambda}\frac{M_1}{m_1} z^{\lg \frac{M_0 m_1}{M_1 m_0} / \lg q}$$

mit einer gewissen reellen Konstante λ. Nach der Voraussetzung ergibt sich aber

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} d \lg Q(z) = \lg \frac{M_0 m_1}{M_1 m_0} \Big/ \lg q,$$

und folglich, wie behauptet,

$$Q(z) = e^{i\lambda}\frac{M_1}{m_1} \equiv \text{konst.} = Q(z_\infty) = 1 \quad \text{oder} \quad \omega^*(z) \equiv \omega_k(z)$$

Nach dieser Vorbemerkung betrachten wir jetzt das mittels der im vorigen Paragraphen eingeführten Funktion f^* gebildete Quotient

$$\Phi(z) \equiv \Phi(z; z_\infty, z_0; \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) = C\frac{f^*(z; z_\infty; e^{\alpha_0}, e^{\alpha_1})}{f^*(z; z_0; e^{\beta_0}, e^{\beta_1})},$$

worin $C\,(\neq 0)$ eine später genau zu bestimmende Konstante bedeutet. Es verhält sich natürlich in R meromorph und besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$\Phi(z_0) = 0, \quad \Phi'(z_0) \neq 0; \quad \Phi(z_\infty) = \infty,$$

$$\operatorname{Res}[z_\infty; \Phi] = C\frac{\operatorname{Res}[z_\infty; f^*(z; z_\infty; e^{\alpha_0}, e^{\alpha_1})]}{f^*(z_\infty; z_0; e^{\beta_0}, e^{\beta_1})}$$

$$= C(-iz_\infty)e^{\alpha_1-\alpha_0} z_\infty^{\left(2i\eta_3 \lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right| - (\alpha_1-\alpha_0) + (\beta_1-\beta_0)\right)/\lg q}$$

$$\times \frac{\sigma(i \lg z_\infty)\,\sigma\!\left(i \lg \frac{z_\infty}{z_0}\right)\sigma_3\!\left(i \lg \frac{|z_\infty|^2}{q}\right)\sigma_3\!\left(i \lg \frac{\bar{z}_0}{q}\right)}{\sigma(i \lg z_0)\,\sigma_3\!\left(i \lg \frac{\bar{z}_\infty}{q}\right)\sigma_3\!\left(i \lg \frac{z_0 z_\infty}{q}\right)};$$

$$|\Phi(z)| = \begin{cases} |C|\,e^{\alpha_0-\beta_0} & (|z| = q), \\ |C|\,e^{\alpha_1-\beta_1} & (|z| = 1); \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint d \lg \Phi(z) = \frac{1}{\lg q}\left(\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right| - (\alpha_1-\alpha_0) + (\beta_1-\beta_0)\right),$$

wo das Integral auf einem in R verlaufenden und seine beide Randkomponenten trennenden Wege zu erstrecken ist. Wählen wir also insbesondere die Parameter $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ und die Konstante C, derart, daß beide Beziehungen

$$\alpha_1 - \alpha_0 - (\beta_1 - \beta_0) = \lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|$$

und

$$C=\frac{i}{z_\infty}e^{-(\alpha_1-\beta_1)}z_\infty^{-(2i\eta_3-1)\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|/\lg q}$$

$$\times\frac{\sigma(i\lg z_0)\sigma_3\left(i\lg\frac{\bar z_\infty}{q}\right)\sigma_3\left(i\lg\frac{\bar z_0 z_\infty}{q}\right)}{\sigma(i\lg z_\infty)\sigma\left(i\lg\frac{z_\infty}{z_0}\right)\sigma_3\left(i\lg\frac{|z_\infty|^2}{q}\right)\sigma_3\left(i\lg\frac{z_0}{q}\right)}$$

bestehen, so erfüllt die Funktion $\Phi(z)$ alle im Anfang dieses Paragraphen für $\omega_k(z;z_\infty,z_0)$ erwähnten Bedingungen. Wir gelangen somit zur gewünschten expliziten Darstellung für die Abbildungsfunktion $\omega_k(z;z_\infty,z_0)$, welche lautet:

$$\omega_k(z;z_\infty,z_0)=\frac{i}{z_\infty}\left(\frac{z}{z_\infty}\right)^{\frac{2\eta_1}{\pi}\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|}$$

$$\times\frac{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_0}\right)\sigma_3\left(i\lg\frac{\bar z_\infty z}{q}\right)\sigma_3\left(i\lg\frac{\bar z_0 z_\infty}{q}\right)}{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)\sigma\left(i\lg\frac{z_\infty}{z_0}\right)\sigma_3\left(i\lg\frac{|z_\infty|^2}{q}\right)\sigma_3\left(i\lg\frac{\bar z_0 z}{q}\right)}$$

$$=\frac{i}{z_\infty}\left(\frac{z}{z_\infty}\right)^{\frac{2\eta_1}{\pi}\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|}\frac{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_0}\right)\sigma(i\lg\bar z_\infty z)\sigma(i\lg z_0 z_\infty)}{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)\sigma\left(i\lg\frac{z_\infty}{z_0}\right)\sigma(i\lg|z_\infty|^2)\sigma(i\lg\bar z_0 z)}$$

Nebenbei bemerkt ist ihre Ableitung an der Nullstelle z_0 gleich

$$\omega'_k(z_0;z_\infty,z_0)=\frac{1}{z_\infty z_0}\left(\frac{z_0}{z_\infty}\right)^{\frac{2\eta_1}{\pi}\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|}\frac{|\sigma(i\lg\bar z_\infty z_0)|^2}{\sigma\left(i\lg\frac{z_\infty}{z_0}\right)^2\sigma(i\lg|z_\infty|^2)\sigma(i\lg|z_0|^2)}$$

hierbei haben wir die Tatsachen benützt, daß bei unsrem Falle $2\omega_1=2\pi$, $2\omega_3=2i\lg\frac{1}{q}$ die Relation nach Legendre:

$$\frac{1}{\lg q}(2i\eta_3-1)=\frac{2\eta_1}{\pi}$$

sowie die identische Beziehung $\sigma(\bar u)=\overline{\sigma(u)}$ gilt.

4. *Eine direkte Herleitung von $\omega_k(z;z_\infty,z_0)$.*

Die die Kreisbogenschlitzabbildung des Kreisringes vermittelnde Funktion läßt sich, wie im letzten Paragraphen wirklich gezeigt wurde, mittels der Greenschen oder lieber der verallgemeinerten Greenschen Funktion leicht konstruieren. Dieselbe Methode scheint aber durch irgendeine einfache Modifikation nicht auf die Konstruktion der später auftretenden verwandten Abbildungsfunktionen anwenden zu können. Um alle in den vorliegenden und nachfolgenden Noten behandelten speziellen Abbildungsfunktionen systematisch aus einer und derselben Quelle ziehen zu wollen, sollen wir hier aufs neue ein anderes mehr unmittelbares Herleitungsverfahren für die Funktion $\omega_k(z;z_\infty,z_0)$ angeben, welches sich umgekehrt auf Konstruktion der Greenschen Funktion selbst anwenden läßt.

Zum Zwecke bemerken wir zuerst die speziellen Gestalten beider Gebiete, welche durch die betreffende Abbildung $\omega=\omega_k(z)$ voneinander entsprechen sollen. Es liegt nämlich nahe, das Spiegelungsprinzip erfolglich anwendbar zu sein. In der Tat läßt sich diese Abbildungsfunktion, vom Urkreisringe R ausgehend, sukzessiv in die benachbarten Kreisringe mit demselben Modul $\lg\frac{1}{q}$ analytisch fortsetzen, derart, daß die Funktionalgleiehungen

$$\omega_k\left(\frac{q^2}{z}\right)=\frac{m_0^2}{\overline{\omega_k(z)}} \quad \text{und} \quad \omega_k\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{m_1^2}{\overline{\omega_k(z)}}$$

immer bestehen, worin m_0 und m_1 dieselbe Bedeutung wie vorher besitzt, und woraus weiter die fundamentale Funktionalgleichung

$$\omega_k\left(\frac{z}{q^2}\right)=\frac{m_1^2}{\overline{\omega_k\left(\frac{q^2}{\bar z}\right)}}=\left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2\omega_k(z)$$

folgt. Die analytisch fortgesetzte Funktion $\omega_k(z)$ verhält sich also in der ganzen punktierten Ebene $0<|z|<\infty$ meromorph. Ihre Pole liegen an den Punkten

$$q^{2n}z_\infty, \quad \frac{q^{2n}}{\bar z_0} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

und sind sämtlich einfach; alle Nullstellen sind auch einfach und liegen an den Punkten

$$q^{2n}z_0, \quad \frac{q^{2n}}{\bar z_\infty} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Nehmen wir nun einen Kreisring um $z=0$ mit dem Modul $2\lg\frac{1}{q}$, etwa den Vereinigungskreisring $q<|z|<\frac{1}{q}$ von dem Urkreisringe R und dessen Spiegelbilde an $|z|=1$, aufs neue als Grundgebiet, so enthält es je zwei Unendlichkeits- und Nullstellen

$$z_\infty, \quad \frac{1}{\bar z_0} \qquad \text{bzw.} \qquad z_0, \quad \frac{1}{\bar z_\infty}.$$

Um nun den Periodizitätscharakter der betreffenden Abbildungsfunktion noch deutlicher einzusehen, wollen wir eine neue Veränderliche w durch die Gleichung

$$w=i\lg z \qquad \text{oder} \qquad z=e^{-iw}$$

einführen, und darauf hin setzen wir

$$\Omega(w)=\omega_k(e^{-iw}).$$

Die Eindeutigkeit von $\omega_k(z)$ zieht zuerst ohne weiteres nach sich die entsprechende Periodizität:

$$\Omega(w+2\pi)=\Omega(w).$$

Wir erhalten weiter nach der oben angegebenen Funktionalgleichung eine komplementäre Pseudoperiodizität:

$$\Omega\left(w+2i\lg\frac{1}{q}\right)=\left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2\Omega(w)$$

Betrachten wir das Grundrechteck

$$V: \qquad 0<\Re w<2\pi,\ -\lg\frac{1}{q}<\Im w<\lg\frac{1}{q},$$

welches bei der Transformation $w=i\lg z$ aus dem längs der positiv-reellen Achse aufgeschlitzten Kreisringe $q<|z|<\frac{1}{q}$ entsteht, so besitzt die Funktion $\Omega(w)$ dort je zwei einfache Unendlichkeits- und Nullstellen

$$w_\infty=i\lg z_\infty,\ \bar{w}_0=i\lg\frac{1}{\bar{z}_0} \qquad w_0=i\lg z_0,\quad \bar{w}_\infty=i\lg\frac{1}{\bar{z}_\infty}$$

Nach dem oben erwähnten Periodizitätscharakter von $\omega_k(z)$ genügt die eindeutige Funktion

$$F(w)=\Omega(w)e^{iaw}\frac{\sigma(w-w_\infty)\sigma(w-\bar{w}_0)}{\sigma(w-\bar{w}_\infty)\sigma(w-w_0)}$$

mit einer unten festzustellenden Konstante a beiden Gleichungen

$$F(w+2\pi)=F(w)\exp\left[-(4\eta_1 i\Im(w_\infty-w_0)-2\pi i a)\right],$$

$$F\left(w+2i\lg\frac{1}{q}\right)=F(w)\left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2\exp\left[-(4\eta_3 i\Im(w_\infty-w_0)-2a\lg\frac{1}{q})\right]$$

Wählen wir daher die Parameter a, m_0 und m_1, derart, daß die Relationen

$$4\eta_1 i\Im(w_\infty-w_0)-2\pi i a=0,$$

$$2\lg\frac{m_1}{m_0}-4\eta_3 i\Im(w_\infty-w_0)-2a\lg\frac{1}{q}=0$$

oder

$$a=\frac{2\eta_1}{\pi}\Im(w_\infty-w_0)=\frac{2\eta_1}{\pi}\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|,$$

$$\frac{m_1}{m_0}=\exp\left(2\eta_3 i\Im(w_\infty-w_0)+\frac{2\eta_1}{\pi}\lg\frac{1}{q}\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|\right)$$

$$=\exp\left(\frac{2}{\pi i}(\eta_1 i\lg\frac{1}{q}-\eta_3\pi)\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|\right)=\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|$$

gelten sollen, so besteht die reine Doppeltperiodizität

$$F(w+2\pi)=F\left(w+2i\lg\frac{1}{q}\right)=F(w)$$

Also ist $F(w)$ eine elliptische Funktion, welche sogar sich überall im ganzen fundamentalen Periodenparallelogramm V regulär verhält. Daher muß sie identisch gleich einer Konstante sein. Die Annahme Res $[z_\infty;\omega_k(z)]=1$ zieht abei nach sich die entsprechende Bedingung

$$\text{Res}\ [w_\infty;\Omega(w)]=ie^{iw_\infty},$$

und folglich ergibt sich

$$F(w_\infty)=ie^{iw_\infty+iaw_\infty}\frac{\sigma(w_\infty-\bar{w}_0)}{\sigma(w_\infty-\bar{w}_\infty)\sigma(w_\infty-w_0)}$$

Somit erhalten wir schließlich die endgültige Darstellung

$$\omega_k(z; z_\infty, z_0) = \Omega(w)$$

$$= F(w_\infty)e^{-iaw}\frac{\sigma(w-\bar{w}_\infty)\sigma(w-w_0)}{\sigma(w-w_\infty)\sigma(w-\bar{w}_0)}$$

$$= \frac{i}{z_\infty}\left(\frac{z}{z_\infty}\right)^{\frac{2\eta_1}{\pi}\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|}\frac{\sigma(i\lg\bar{z}_\infty z)\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_0}\right)\sigma(i\lg\bar{z}_0 z_\infty)}{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)\sigma(i\lg|z_\infty|^2)\sigma\left(i\lg\frac{z_\infty}{z_0}\right)\sigma(i\lg\bar{z}_0 z)},$$

welche gerade mit derjenigen im vorigen Paragraphen erhaltenen übereinstimmt.

5. *Monodromiebedingung für die Radialschlitzabbildung.*

Wir haben in den vorigen Paragraphen die Kreisbogenschlitzabbildung $\omega = \omega_k(z)$ des Kreisringes R: $q < |z| < 1$ behandelt. Wir können uns mittels ganz ähnlicher Methode diejenige Funktion

$$\omega = \omega_r(z) \equiv \omega_r(z; z_\infty, z_0)$$

unter denselben Normierungsbedingungen wie bei $\omega_k(z)$:

$$\omega_r(z_0) = 0\,, \quad \omega_r(z_\infty) = \infty\,, \quad \mathrm{Res}\,[z_\infty; \omega_r] = 1$$

beschäftigen, welche die Abbildung von R auf ein Radialschlitzgebiet vermittelt, das dadurch entsteht, daß man die volle ω-Ebene längs zwei Strecken auf den Radialstrahlen bezüglich $\omega = 0$ aufschlitzt. Diese Funktion bestimmt sich wiederum durch die angegebenen Normierungsbediugungen ganz eindeutigerweise. Hierbei verhält sich jeder Zweig der Funktion

$$-i\lg\left[\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}\,\frac{z-z_\infty}{1-\bar{z}_\infty z}\,\omega_r(z)\right]$$

in R wiederum regulär und sogar eindeutig, was in ganz ähnlicher Weise wie beim Falle $\omega_k(z)$ bestätigt werden kann. Bezeichnen wir also beide die Bildschlitze von $|z| = q$ und $|z| = 1$ tragenden Halbstrahlen mit $\arg\omega = \varkappa_0$ bzw. $= \varkappa_1$ und wenden dann auf diese Funktion die Monodromiebedingung an, so ergibt sich sofort die Gleichung:

$$\varkappa_1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\arg\left(\frac{1-\bar{z}_0 e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_0}\,\frac{e^{i\theta}-z_\infty}{1-\bar{z}_\infty e^{i\theta}}\right)d\theta$$

$$= \varkappa_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\arg\left(\frac{1-\bar{z}_0 q e^{i\theta}}{qe^{i\theta}-z_0}\,\frac{qe^{i\theta}-z_\infty}{1-\bar{z}_\infty q e^{i\theta}}\right)d\theta\,.$$

Die hier auftretenden Integrale lassen sich beide, etwa mittels des Gaußischen Mittelwertsatzes, leicht ausrechnen, und wir erhalten somit die wichtige Relation

$$\varkappa_1 - \varkappa_0 = \arg\frac{z_\infty}{z_0}\,;$$

hierbei sind die Zweige der Argumente natürlicherweise geeignet zu wählen.

6. *Bestimmung der die Radialschlitzabbildung vermittelnde Funktion* $\omega_r(z; z_\infty, z_0)$.

Um die Fuktion $\omega_r(z)\equiv\omega_r(z;z_\infty,z_0)$ explizit darzustellen, können wir ganz wie vorher fortfahren. Sie läßt sich nämlich in eine auf der punktierten Ebene $0<|z|<\infty$ meromorphe Funktion, mittels der Funktionalgleichungen

$$\omega_r\left(\frac{q^2}{\bar z}\right)=e^{2i\chi_0}\overline{\omega_r(z)}, \quad \omega_r\left(\frac{1}{\bar z}\right)=e^{2i\chi_1}\overline{\omega_r(z)},$$

analytisch fortsetzen, woraus weiter die Gleichung

$$\omega_r\left(\frac{z}{q^2}\right)=e^{2i\chi_1}\overline{\omega_r\left(\frac{q^2}{\bar z}\right)}=e^{2i\chi_1}\overline{e^{2i\chi_0}\overline{\omega_r(z)}}=e^{2i(\chi_1-\chi_0)}\omega_r(z)$$

folgt. Ihre in Frage kommenden Unendlichkeits- und Nullstellen liegen an den Punkten

$$z_\infty,\ \frac{1}{\bar z_\infty} \quad \text{bzw.} \quad z_0,\ \frac{1}{\bar z_0}$$

und sind natürlich sämtlich einfach.

Führen wir wiederum die Hilfsveränderliche $w=i\lg z$ ein und betrachten dann die transformierte Funktion

$$\Omega(w)=\omega_r(e^{-iw};z_\infty,z_0),$$

so genügt sie den entsprechenden Funktionalgleichungen

$$\Omega(w+2\pi)=\Omega(w) \quad \text{und} \quad \Omega\left(w+2i\lg\frac{1}{q}\right)=e^{2i(\chi_1-\chi_0)}\Omega(w),$$

und besitzt im Grundrechtecke V je zwei einfache Pole und Nullstellen:

$$w_\infty=i\lg z_\infty,\ \bar w_\infty=i\lg\frac{1}{\bar z_\infty} \quad \text{bzw.} \quad w_0=i\lg z_0,\ \bar w_0=i\lg\frac{1}{\bar z_0}.$$

Die mit einer später festzustellenden Konstante b versehene Funktion

$$F(w)=\Omega(w)e^{bw}\frac{\sigma(w-w_\infty)\sigma(w-\bar w_\infty)}{\sigma(w-w_0)\sigma(w-w_0)}$$

verhält sich also überall im Endlichen der w-Ebene regulär und eindeutig, d. h. stellt eine ganze Funktion dar. Sie genügt sogar den Funktionalgleichungen

$$F(w+2\pi)=F(w)\exp\left[-4\eta_1\Re(w_\infty-w_0)-2\pi b)\right],$$

$$F\left(w+2i\lg\frac{1}{q}\right)=F(w)\ \exp\left(2i(\varkappa_1-\varkappa_0)-(4\eta_3\Re(w_\infty-w_0)-2ib\lg\frac{1}{q})\right)$$

Bestimmen wir deshalb die hier enthaltenen Parameter durch die Relationen

$$b=\frac{2\eta_1}{\pi}\Re(w_\infty-w_0)=-\frac{2\eta_1}{\pi}\arg\frac{z_\infty}{z_0},$$

$$\varkappa_1-\varkappa_0=-2\eta_3 i\Re(w_\infty-w_0)+\frac{2\eta_1}{\pi}\lg q$$

$$=\frac{2}{\pi i}\left(\eta_1 i\lg\frac{1}{q}-\eta_3\pi\right)\arg\frac{z_\infty}{z_0}=\arg\frac{z_\infty}{z_0},$$

so wird die Funkfion $F(w)$ doppeltperiodisch. Ihrer Eindeutigkeit und Regulari tät wegen muß sie also identisch konstant sein. Wir erhalten somit, unter Berücksichtigung der auferlegten Normierung an z_∞, die gesuchte Darstellung:

$$\omega_r(z; z_\infty, z_0) = \frac{i}{z_\infty}\left(\frac{z}{z_\infty}\right)^{\frac{2\eta_1 i}{\pi}\arg\frac{z_\infty}{z_0}}$$

$$\times \frac{\sigma(i \lg |z_\infty|^2)\sigma\left(i \lg \frac{z}{z_0}\right)\sigma(i \lg \bar{z}_0 z)}{\sigma\left(i \lg \frac{z}{z_\infty}\right)\sigma(i \lg z_\infty z)\sigma\left(i \lg \frac{z_\infty}{z_0}\right)\sigma(i \lg \bar{z}_0 z_\infty)}.$$

Die Ableitung an z_0 beträgt hierbei

$$\omega_r'(z_0; z_\infty, z_0) = \frac{1}{z_\infty z_0}\left(\frac{z_0}{z_\infty}\right)^{\frac{2\eta_1 i}{\pi}\arg\frac{z_\infty}{z_0}} \frac{\sigma(i \lg |z_\infty|^2)\sigma(i \lg |z_0|^2)}{\sigma\left(i \lg \frac{z_\infty}{z_0}\right)^2 |\sigma(i \lg \bar{z}_\infty z_0)|^2}.$$