41. *Sur la déformation infinitésimale tangentielle d'un sous espace.**)

Par Kentaro YANO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., May 12, 1945.)

Dans les deux Notes précédentes, nous nous sommes occupés de la théorie des déformations infinitésimales. Dans la première[1], nous avons discuté la déformation infinitésimale d'un espace lui-même à connexion affine générale avec torsion et donné une méthode pour interpréter géométriquement des résultats connus jusqu'à présent.

Dans la deuxième, nous avons considéré la déformation infinitésimale d'un sous-espace plongé dans un espace affine, le sous-espace peuvant être regardé comme un espace à connexion affine sans torsion, et nous avons montré que, si l'on considère, en particulier, une déformation infinitésimale tangentielle du sous-espace en lui-même, on peut, le sous-espace étant lui-même un espace à connexion affine, retrouver les formules sur la déformation infinitésimale d'un espace à connexion affine sans torsion.

Nous allons, dans la présente Note, généraliser les résultats, obtenus dans la deuxième Note citée ci-dessus, pour un sous-espace plongé dans un espace à connexion affine générale avec torsion.

§ 1. *La déformation infinitésimale d'un sous-espace plongé dans un espace à connexion affine générale avec torsion.*[3]

Considérons un espace A_n à n dimensions à connexion affine générale avec torsion et désignons par $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ et par $S^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu}$ les composantes de la connexion affine et du tenseur de torsion respectivement. Prenons, dans cet espace, un sous-espace A_m aux equations

---

*) La dépense de cette recherche fut réglée par le frais du Ministère de l'Instruction Publique pour les recherches scientifiques.

1) K. Yano: Bemerkungen zur infinitesimalen Deformationen eines Raumes. Proc. **21** (1945), 261–268.

2) K. Yano: Sur les déformations infinitésimales des sous-espaces dans un espace affine. Proc. **21** (1945), 261–262.

3) H. A. Hayden: Infinitesimal deformations of subspaces in a general metrical space. Proc. London Math. Soc., **37** (1934), 416–440; Infinitesimal deformations of an L_m in an L_n. ibid. **41** (1936), 332–336.

$$(1.1)\qquad x^{\lambda}=x^{\lambda}(x^{i})^{1)},$$

et considérons la déformation infinitésimale

$$(1.2)\qquad \bar{x}^{\lambda}=x^{\lambda}+\xi^{\lambda}(x^{i})dt\,,$$

où ξ^{λ} est un champ de vecteur défini sur chaque point de A_m et dt une quantité infinitésimale dont nous ne tiendrons compte que du premier ordre.

Alors, les valeurs variées $\overline{B}_{j}^{\cdot\lambda}$ des composantes des facteurs de projection $B_{j}^{\cdot\lambda}=\partial x^{\lambda}/\partial x^{j}$ sont données par

$$(1.3)\qquad \overline{B}_{j}^{\cdot\lambda}=B_{j}^{\cdot\lambda}+\xi^{\lambda}{}_{,j}dt^{2)}\,.$$

D'autre part, si l'on transporte les vecteurs $B_{i}^{\cdot\lambda}$ en x^{λ} parallelèment, d'après la connexion affine de l'espace ambiant, du point x^{λ} jusqu'au point $\bar{x}^{\lambda}$, on aura les vecteurs

$$\widetilde{B}_{j}^{\cdot\lambda}=B_{j}^{\cdot\lambda}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}\xi^{\nu}dt$$

en $\bar{x}^{\lambda}$, donc, en posant

$$(1.4)\qquad \varDelta B_{j}^{\cdot\lambda}=\overline{B}_{j}^{\cdot\lambda}-\widetilde{B}_{j}^{\cdot\lambda}\,,$$

on trouve

$$(1.5)\qquad \varDelta B_{j}^{\cdot\lambda}=\xi^{\lambda}_{\cdot j}dt\,,$$

où nous avons posé

$$(1.6)\qquad \xi^{\lambda}_{\cdot j}=\xi^{\lambda}{}_{;j}+S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}\xi^{\nu}\,.$$

Si l'on écrit le vecteur de déformation ξ^{λ} sous la forme

$$\xi^{\lambda}=B_{i}^{\cdot\lambda}\xi^{i}+B_{P}^{\cdot\lambda}\xi^{P}\,,$$

nous avons, de (1.6),

$$(1.7)\qquad \xi^{\lambda}_{\cdot j}=B_{i}^{\cdot\lambda}(\xi^{i}{}_{;j}-L^{i}_{\cdot jP}\xi^{P})+S^{\lambda}_{\cdot jk}\xi^{k}+B_{P}^{\cdot\lambda}(\xi^{P}{}_{;j}+H_{ij}^{\cdot\cdot P}\xi^{i})+S^{\lambda}_{\cdot jP}\xi^{P},$$

grâce aux relations

$$(1.8)\qquad B_{j;k}^{\cdot\lambda}=H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=H_{jk}^{\cdot\cdot P}B_{P}^{\cdot\lambda}\quad\text{et}\quad B_{P;k}^{\cdot\lambda}=-B_{i}^{\cdot\lambda}L^{i}_{\cdot kP}\,,$$

où nous avons posé

$$(1.9)\qquad S^{\lambda}_{\cdot jk}=B_{jk}^{\mu\nu}S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}{}^{3)}\quad\text{et}\quad S^{\lambda}_{\cdot jP}=B_{jP}^{\mu\nu}S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}\,,$$

$B_{P}^{\cdot\lambda}$ étant $n-m$ vecteurs linéairement indepéndents et pseudorthogonaux à A_m.

Or, nous posons

$$(1.10)\qquad \varDelta B_{P}^{\cdot\lambda}=\zeta_{P}^{\cdot\lambda}dt=[B_{i}^{\cdot\lambda}\zeta_{P}^{\cdot i}+B_{Q}^{\cdot\lambda}\zeta_{P}^{\cdot Q}]dt\,.$$

Alors, la variation $\varDelta B^{i}_{\cdot\lambda}$ de $B^{i}_{\cdot\lambda}$ peut être obtenue en appliquant l'opérateur $\varDelta$ aux équations de définition $B_{j}^{\cdot\lambda}B^{i}_{\cdot\lambda}=\delta^{i}_{j}$ et $B_{P}^{\cdot\lambda}B^{i}_{\cdot\lambda}=0$:

$$(1.11)\qquad \varDelta B^{i}_{\cdot\lambda}=-[B^{j}_{\cdot\lambda}\xi^{i}_{\cdot j}+B^{P}_{\cdot\lambda}\zeta_{P}^{\cdot i}]dt\,,$$

où nous avons posé

---

1) Les indices $\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \dots,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \dots, \\ a,\ b,\ c,\ \dots,\ i,\ j,\ k,\ \dots, \\ A,\ B,\ C,\ \dots,\ P,\ Q,\ R,\ \dots,\end{cases}$ prennent respectivement les valeurs $\begin{cases}1,\ 2,\ \dots,\ n, \\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dots,\ \dot{m}, \\ \dot{m}+\dot{1},\ \dots,\ n.\end{cases}$

2) La virgule désigne la dérivée partielle et le point-virgule dérivée covariante.

3) Nous ne répèterons pas la lettre B.

$$(1.12)\qquad \xi^i_{.j} = B^i_{.\lambda}\xi^\lambda_{.j} = \xi^i_{;j} + S^i_{.jk}\xi^k + (S^i_{.jP} - L^i_{.jP})\xi^P.$$

De même, la variation $\Delta B^P_{.\lambda}$ de $B^P_{.\lambda}$ peut être obtenue en appliquant Δ aux équations de définition $B^{\cdot\lambda}_j B^P_{.\lambda} = 0$ et $B^{\cdot\lambda}_Q B^P_{.\lambda} = \delta^P_Q$:

$$(1.13)\qquad \Delta B^P_{.\lambda} = -[B^j_{.\lambda}\xi^P_{.j} + B^Q_{.\lambda}\zeta^{\cdot P}_Q]dt,$$

où

$$(1.14)\qquad \xi^P_{.j} = B^P_{.\lambda}\xi^\lambda_{.j} = \xi^P_{;j} + S^P_{.jQ}\xi^Q + H^{\cdot\cdot P}_{jk}\xi^k,$$

$S^i_{.jk}$, $S^i_{.jP}$, $S^P_{.jk}$ et $S^P_{.jQ}$ ayant les significations analogues à (1.9).

Cela étant, les composantes variées $\overline{B}^{\cdot\lambda}_j$, $\overline{B}^{\cdot\lambda}_P$, $\overline{B}^i_{.\lambda}$ et $\overline{B}^P_{.\lambda}$ de $B^{\cdot\lambda}_j$, $B^{\cdot\lambda}_P$, $B^i_{.\lambda}$ et $B^P_{.\lambda}$ étant respectivement données par

$$(1.15)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \overline{B}^{\cdot\lambda}_j = B^{\cdot\lambda}_j + \xi^\lambda_{,j}dt, \\ \text{(ii)} & \overline{B}^{\cdot\lambda}_P = B^{\cdot\lambda}_P - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}B^{\cdot\mu}_P\xi^\nu dt + \zeta^{\cdot\lambda}_P dt, \\ \text{(iii)} & \overline{B}^i_{.\lambda} = B^i_{.\lambda} + \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}B^i_{.\alpha}\xi^\nu dt - [B^j_{.\lambda}\xi^i_{.j} + B^P_{.\lambda}\zeta^{\cdot i}_P]dt, \\ \text{(iv)} & \overline{B}^P_{.\lambda} = B^P_{.\lambda} + \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}B^P_{.\alpha}\xi^\nu dt - [B^j_{.\lambda}\xi^P_{.j} + B^Q_{.\lambda}\zeta^{\cdot P}_Q]dt, \end{cases}$$

nous allons calculer les composantes $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ de la connexion affine induite variée.

Nous avons

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \overline{B}^i_{.\lambda}(\overline{B}^{\cdot\mu}_j\overline{B}^{\cdot\nu}_k\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\overline{x}) + \overline{B}^{\cdot\lambda}_{j,k}),$$

donc, en effectuant le calcul, on trouve

$$(1.16)\qquad \Delta\Gamma^i_{jk} = B^i_{.\lambda}(\xi^\lambda_{.j;k} + B^{\mu\nu}_{j\,k}R^\lambda_{.\mu\nu\omega}\xi^\omega)dt + H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}(\Delta B^i_{.\lambda}),$$

où nous avons posé

$$(1.17)\qquad \Delta\Gamma^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk},$$

Γ^i_{jk} étant les composantes de la connexion affine induite sur le sous-espace original. De l'équation (1.16), on trouve, après un calcul simple,

$$(1.18)\qquad \Delta S^i_{.jk} = (\Delta B^i_{.\lambda})B^{\mu\nu}_{j\,k}S^\lambda_{.\mu\nu} + B^i_{.\lambda}\xi^\mu_{.j}B^{\cdot\nu}_k S^\lambda_{.\mu\nu}dt + B^{i\mu\nu}_{\lambda j}\xi^\nu_{.k}S^\lambda_{.\mu\nu}dt$$
$$+ B^{i\mu\nu}_{\lambda jk}S^\lambda_{.\mu\nu;\omega}\xi^\omega dt.$$

L'équation (1.18) peut être aussi obtenue en appliquant l'opérateur Δ à $S^i_{.jk} = B^{i\mu\nu}_{\lambda jk}S^\lambda_{.\mu\nu}$ et en remarquant qué

$$\Delta B^{\cdot\lambda}_j = \xi^\lambda_{.j}dt \quad \text{et} \quad \Delta S^\lambda_{.\mu\nu} = S^\lambda_{.\mu\nu;\omega}\xi^\omega dt.$$

Cela étant, calculons la variation $\Delta\Gamma^P_{Qk}$ des composantes Γ^P_{Qk} de la connexion affine induite sur l'espace pseudonormal A^{n-m}_n déterminé par $n-m$ vecteurs $B^{\cdot\lambda}_P$. On a

$$\overline{\Gamma}^P_{Qk} = \overline{B}^P_{.\lambda}(\overline{B}^{\cdot\mu}_Q\overline{B}^{\cdot\nu}_k\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\overline{x}) + \overline{B}^{\cdot\lambda}_{Q,k}),$$

donc, en substituant (1.15) (ii) et (iv) dans cette équation, on trouve

$$(1.19)\qquad \Delta\Gamma^P_{Qk} = [B^P_{.\lambda}(\zeta^{\cdot\lambda}_{Q;k} + B^{\mu\nu}_{Qk}R^\lambda_{.\mu\nu\omega}\xi^\omega) + \xi^P_{.i}L^i_{.kQ}]dt,$$

où nous avons posé

$$(1.20)\qquad \Delta\Gamma^P_{Qk} = \overline{\Gamma}^P_{Qk} - \Gamma^P_{Qk},$$

Γ^P_{Qk} étant les composantes de la connexion affine induite sur l'espace pseudorthogonal original.

Or, pour trouver les variations des tenseurs d'Euler-Schouten $H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}$ et $L^{i}_{\cdot k\lambda}$, nous utiliserons la formule

$$(1.20)\quad \Delta(T^{\lambda}_{\cdot jQ;k})-(\Delta T^{\lambda}_{\cdot jQ})_{;k}=T^{\alpha}_{\cdot jQ}(R^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu\omega}B^{\cdot\nu}_{k}\xi^{\omega})dt-T^{\lambda}_{\cdot iQ}(\Delta\Gamma^{i}_{jk})-T^{\lambda}_{\cdot jP}(\Delta\Gamma^{P}_{Qk}),$$

qui sera facilement démontrée par un calcul direct, $T^{\lambda}_{\cdot jQ}$ étant un tenseur général mixte.

En appliquant la formule (1.20) au facteur de projection $B^{\cdot\lambda}_{j}$ et en remarquant que $\Delta B^{\cdot\lambda}_{j}=\xi^{\lambda}_{\cdot j}dt$, on trouve

$$(1.21)\qquad \Delta H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}=(\xi^{\lambda}_{\cdot j;k}+R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}B^{\mu\nu}_{jk}\xi^{\omega})dt-B^{\cdot\lambda}_{i}(\Delta\Gamma^{i}_{jk}),$$

d'où, en y substituant (1.16),

$$(1.23)\quad \Delta H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}=B^{\cdot\lambda}_{P}B^{P}_{\cdot\alpha}(\xi^{\alpha}_{\cdot j;k}+R^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\omega}B^{\mu\nu}_{jk}\xi^{\omega})dt-B^{\cdot\lambda}_{i}H^{\cdot\cdot\alpha}_{jk}(\Delta B^{i}_{\cdot\alpha}).$$

En appliquant de même la formule (1.20) au facteur de projection $B^{i}_{\cdot\lambda}$, on trouve

$$(1.23)\qquad \Delta L^{i}_{\cdot k\lambda}=B^{j}_{\cdot\lambda}(\Delta\Gamma^{i}_{jk})-B^{i}_{\cdot\alpha}R^{\alpha}_{\cdot\lambda\nu\omega}B^{\cdot\nu}_{k}\xi^{\omega}dt+(\Delta B^{i}_{\cdot\lambda})_{;k}.$$

Cela posé, nous allons passer au calcul des variations des tenseurs de courbure $R^{i}_{\cdot jkh}$ de A_n et $R^{P}_{\cdot Qkh}$ de A^{n-m}_{n}.

En substituant d'abord $\overline{\Gamma}^{i}_{jk}=\Gamma^{i}_{jk}+\Delta\Gamma^{i}_{jk}$ dans

$$\overline{R}^{i}_{\cdot jkh}=\overline{\Gamma}^{i}_{jk,h}-\overline{\Gamma}^{i}_{jh,k}+\overline{\Gamma}^{a}_{jk}\overline{\Gamma}^{i}_{ah}-\overline{\Gamma}^{a}_{jh}\overline{\Gamma}^{i}_{ak},$$

on trouve

$$(1.24)\qquad R^{i}_{\cdot jkh}=(\Delta\Gamma^{i}_{jk})_{;h}-(\Delta\Gamma^{i}_{jh})_{;k}+(\Delta\Gamma^{i}_{ja})S^{a}_{\cdot kh},$$

$\Delta R^{i}_{\cdot jkh}$ désignant $\overline{R}^{i}_{\cdot jkh}-R^{i}_{\cdot jkh}$.

En substituant (1.16) dans (1,24), on a, après un calcul assez long,

$$\begin{aligned}(1.25)\quad \Delta R^{i}_{\cdot jkh}=&(\Delta B^{i}_{\cdot\lambda})B^{\mu\nu\omega}_{jkh}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+B^{i}_{\cdot\lambda}\xi^{\mu}_{\cdot j}B^{\nu\omega}_{kh}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}dt+B^{i\mu}_{\lambda j}\xi^{\nu}_{\cdot k}B^{\cdot\omega}_{h}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}dt\\&+B^{i\mu\nu}_{\lambda jk}\xi^{\omega}_{\cdot h}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}dt+B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\alpha}\xi^{\alpha}dt\\&+(\Delta H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk})L^{i}_{\cdot h\lambda}+H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}(\Delta L^{i}_{\cdot h\lambda})-(\Delta H^{\cdot\cdot\lambda}_{jh})L^{i}_{\cdot k\lambda}-H^{\cdot\cdot\lambda}_{jh}(\Delta L^{i}_{\cdot k\lambda}).\end{aligned}$$

Cette équation peut être aussi obtenue en appliquant l'opérateur Δ à l'équation de Gauss

$$R^{i}_{\cdot jkh}=B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}L^{i}_{\cdot h\lambda}-H^{\cdot\cdot\lambda}_{jh}L^{i}_{\cdot k\lambda}.$$

En appliquant aussi l'opérateur Δ à l'équation de Ricci

$$R^{P}_{\cdot Qkh}=B^{P\mu\nu\omega}_{\lambda Qkh}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+H^{\cdot\cdot P}_{ak}L^{a}_{\cdot hQ}-H^{\cdot\cdot P}_{ah}L^{a}_{\cdot kQ},$$

on trouve

$$\begin{aligned}(1.26)\quad \Delta R^{P}_{\cdot Qkh}=&(\Delta B^{P}_{\cdot\lambda})B^{\mu\nu\omega}_{Qkh}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+B^{P}_{\cdot\lambda}\zeta^{\cdot\mu}_{Q}B^{\nu\omega}_{kh}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}dt+B^{P\mu}_{\lambda Q}\xi^{\nu}_{\cdot k}B^{\cdot\omega}_{h}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}dt\\&+B^{P\mu\nu}_{\lambda Qk}\xi^{\omega}_{\cdot h}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+B^{P\mu\nu\omega}_{\lambda Qkh}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\alpha}\xi^{\alpha}dt\\&+(\Delta H^{\cdot\cdot P}_{ak})L^{a}_{\cdot hQ}+H^{\cdot\cdot P}_{ak}(\Delta L^{a}_{\cdot hQ})-(\Delta H^{\cdot\cdot P}_{ah})L^{a}_{\cdot kQ}-H^{\cdot\cdot P}_{ah}(\Delta L^{a}_{\cdot kQ}),\end{aligned}$$

$\Delta H^{\cdot\cdot P}_{jk}$ et $\Delta L^{i}_{\cdot kQ}$ étant obtenus de (1.10), (1.13), (1.22) et (1.23).

§ 2. *La déformation infinitésimale tangentielle d'un sous-espace.*

Nous allons, dans le présent paragraphe, considérer une déformation infinitésimale dite tangentielle d'un sous-espace, soit, une déformation infinitésimale d'un sous-espace définie par les équations de la forme

(2.1) $$\bar{x}^{\lambda}=x^{\lambda}+B_{i}^{\cdot\lambda}\xi^{i}dt\,,$$

ξ^i étant des fonctions des paramètres x^i.

Chaque point du sous-espace étant, d'après (2.1), déplacé à un point aussi sur le sous-espace, le sous-espace lui-même ne change pas. Mais, les équations (2.1) peuvent être aussi écrites

(2.2) $$\bar{x}^{\lambda}(x^{i})=x^{\lambda}(x^{i})+\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{i}}\xi^{i}dt=x^{\lambda}(x^{i}+\xi^{i}dt)\,.$$

Donc, on peut regarder cette déformation infinitésimale tangentielle comme une déformation infinitésimale

(2.3) $$x^{i}\rightarrow x^{i}+\xi^{i}dt$$

du sous-espace en lui-même.

Par conséquent, en spécialisant les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, on peut retrouver les résultats connus pour la déformation infinitésimale de l'espace lui-même et quelques interprétation géométriques des dérivées de Lie des grandeurs du sous-espace, regardé comme un espace général à connexion affine avec torsion.

Or, en posant

(2.4) $$\xi^{\lambda}=B_{i}^{\cdot\lambda}\xi^{i}\,,$$

et par conséquent $\xi^{P}=0$ dans (1.7), on obtient

$$\xi^{\lambda}_{\cdot j}=B_{i}^{\cdot\lambda}\xi^{i}_{;j}+S^{\lambda}_{\cdot jk}\xi^{k}+H_{ij}^{\cdot\cdot\lambda}\xi^{i}\,,$$

d'où

(2.5) $$\xi^{\lambda}_{\cdot j}=B_{i}^{\cdot\lambda}\xi^{i}_{\cdot j}+H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}\xi^{k}\,,$$

grâce aux équations

$$H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}-H_{kj}^{\cdot\cdot\lambda}=S^{\lambda}_{\cdot jk}-B_{i}^{\cdot\lambda}S^{i}_{\cdot jk}\,,$$

où, par définition,

$$\xi^{i}_{\cdot j}=\xi^{i}_{;j}+S^{i}_{\cdot jk}\xi^{k}\,.$$

La variation $\varDelta B_{j}^{\cdot\lambda}=\xi^{\lambda}_{\cdot j}dt$ de $B_{j}^{\cdot\lambda}$ étant ainsi déterminée, on peut trouver la variation $\varDelta v^{i}$ d'un vecteur contrevariant v^{i} du sous-espace de la manière suivante: Soit v^{i} un vecteur contrevariant arbitraire du sous-espace.

Alors, $B_{i}^{\cdot\lambda}v^{i}$ représente un vecteur contrevariant de l'espace ambiant qui est tangent au sous-espace. Cela étant, appliquons l'opérateur $\varDelta$ à ce vecteur de l'espace ambiant:

(2.6) $$\varDelta(B_{i}^{\cdot\lambda}v^{i})=(\varDelta B_{i}^{\cdot\lambda})v^{i}+B_{i}^{\cdot\lambda}(\varDelta v^{i})\,.$$

Or, en rappelant que l'opérateur $\varDelta$ appliqué à une grandeur de A_n signifie la dérivée covariante dans la direction $\xi^{\lambda}=B_{i}^{\cdot\lambda}\xi^{i}$, on a, d'une part,

$$\varDelta(B_{i}^{\cdot\lambda}v^{i})=(B_{i}^{\cdot\lambda}v^{i})_{;j}\xi^{j}dt=[H_{ij}^{\cdot\cdot\lambda}v^{i}\xi^{j}+B_{i}^{\cdot\lambda}v^{i}_{;j}\xi^{j}]dt\,,$$

et d'autre part, de (2.6),

$$\Delta(B_i^{\cdot\lambda}v^i)\equiv[B_i^{\cdot\lambda}\xi^i_{\cdot j}+H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}\xi^k]v^j dt+B_i^{\cdot\lambda}(\Delta v^i),$$

donc, en comparant ces deux équations, on trouve

$$(2.7)\qquad \Delta v^i=[v^i_{;j}\xi^j-\xi^i_{\cdot j}v^j]dt$$

On voit ainsi que, dans le cas de la déformation infinitésimale tangentielle, l'opérateur Δ appliqué à un vecteur contrevariant du sous-espace nous donne la dérivée de Lie de ce vecteur.

En apliquant le même procédé au vecteur $B_P^{\cdot\lambda}v^P$ pseudorthogonal, on trouve

$$(2.8)\qquad \zeta_P^{\cdot i}\equiv -L^i_{\cdot jP}\xi^j,$$

et

$$(2.9)\qquad \Delta v^P=[v^P_{;j}\xi^j-\zeta_Q^{\cdot P}v^Q]dt.$$

Donc, en substituant (2.8) dans l'expression de $\Delta B_P^{\cdot\lambda}$, on obtient

$$(2.10)\qquad \Delta B_P^{\cdot\lambda}=[B_i^{\cdot\lambda}L^i_{\cdot jP}\xi^j+B_Q^{\cdot\lambda}\zeta_P^{\cdot Q}]dt,$$

$\zeta_Q^{\cdot P}$ étant encore arbitraire. L'équation (2.9) nous donne la variation d'un vecteur contrevariant de A_n^{n-m} dans le cas de la déformation infinitesimale tangentielle.

Les $\zeta_P^{\cdot i}$ étant ainsi détermines, substituons (2.8) dans (1.11), alors, on obtiendra

$$(2.11)\qquad \Delta B^{i}_{\cdot\lambda}=[-B^j_{\cdot\lambda}\xi^i_{\cdot j}+L^i_{\cdot j\lambda}\xi^j]dt.$$

En prenant un vecteur covariant v_i du sous-espace et en appliquant le même procédé que le précédent à $B^i_{\cdot\lambda}v_i$, on trouve

$$(2.12)\qquad \Delta v_i=[v_{i;j}\xi^j+\xi^j_{\cdot i}v_j]dt.$$

Par conséquent, on voit que l'opérateur Δ appliqué à un vecteur covariant du sous-espace donne aussi la dérivée de Lie de ce vecteur.

Enfin, pour obtenir la variation $\Delta B^P_{\cdot\lambda}$ de $B^P_{\cdot\lambda}$, posons $\xi^P=0$ dans (1.14) et substituons le résultat obtenu dans (1.13), alors on obtiendra

$$(2.13)\qquad \Delta B^P_{\cdot\lambda}=-[B^j_{\cdot\lambda}H_{jk}^{\cdot\cdot P}\xi^k+B^Q_{\cdot\lambda}\zeta_Q^{\cdot P}]dt.$$

En appliquant le même procédé que le précédent à $B^P_{\cdot\lambda}v_P$, on trouve

$$(2.14)\qquad \Delta v_P=[v_{P;j}\xi^j+\zeta_P^{\cdot Q}v_Q]dt,$$

qui donne la variation d'un vecteur covariant arbitraire de A_n^{n-m}.

Pour obtenir la variation $\Delta\Gamma^i_{jk}$ de Γ^i_{jk} dans le cas de la déformation infinitésimale tangentielle, substituons (2.5), $\xi^\omega=B_h^{\cdot\omega}\xi^h$ et (1.11) dans (1.16), alors on obtient

$$(2.15)\qquad \Delta\Gamma^i_{jk}=[\xi^i_{\cdot j;k}+R^i_{\cdot jkh}\xi^h]dt,$$

grâce aux équations de Gauss pour le sous-espace, ce qui nous montre que l'opérateur Δ appliqué à Γ^i_{jk} nous donne la dérivée de Lie de Γ^i_{jk} dans la direction de ξ^i.

La variation $\Delta S^i_{\cdot jk}$ du tenseur de torsion $S^i_{\cdot jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}$, peut se calculer facilement en partant de (1.15)

$$(2.16) \qquad \varDelta S^{i}_{\cdot jk} = [S^{i}_{\cdot jk;a}\xi^{a} - S^{a}_{\cdot jk}\xi^{i}_{\cdot a} + S^{i}_{\cdot ak}\xi^{a}_{\cdot j} + S^{i}_{\cdot ja}\xi^{a}_{\cdot k}]dt\,.$$

Donc, $\varDelta S^{i}_{\cdot jk}$ est la dérivée de Lie de $S^{i}_{\cdot jk}$. La formule (2.16) peut s'obtenir aussi de (1.18) en tenant compte de (2.5) et de (2.11).

Pout obtenir $\varDelta\Gamma^{P}_{Qk}$, remarquons d'abord,

$$\zeta^{\cdot P}_{Q;k} = (B^{P}_{\cdot\lambda}\zeta^{\cdot\lambda}_{Q})_{;k} = -B^{j}_{\cdot\lambda}H^{\cdot\cdot P}_{jk}\zeta^{\cdot\lambda}_{Q} + B^{P}_{\cdot\lambda}\zeta^{\cdot\lambda}_{Q;k}\,,$$

par suite

$$B^{P}_{\cdot\lambda}\zeta^{\cdot\lambda}_{Q;k} = \cdot\zeta^{\cdot P}_{Q;k} - H^{\cdot\cdot P}_{jk}L^{j}_{\cdot hQ}\xi^{h}$$

et

$$\xi^{P}_{\cdot j} = H^{\cdot\cdot P}_{jk}\xi^{k}.$$

En substituant ces deux équations dans (1.19) on trouve

$$(2.17) \qquad \varDelta\Gamma^{P}_{Qk} = [\zeta^{\cdot P}_{Q;k} + R^{P}_{\cdot Qkh}\xi^{h}]dt\,,$$

grâce à l'équation de Ricci pour le sous-espace.

Or, pour trouver la variation

$$\varDelta H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk} = (\xi^{\lambda}_{\cdot j;k} + B^{\mu\nu}_{jk}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^{\omega})dt - B^{\cdot\lambda}_{i}(\varDelta\Gamma^{i}_{jk})$$

du tenseur d'Euler-Schouten $H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}$, substituons (2.5), $\xi^{\omega} = B^{\cdot\omega}_{h}\xi^{h}$, et (2.15) dans cette équation, alors on obtiendra

$$(2.18) \qquad \varDelta H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk} = [H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk;h}\xi^{h} + H^{\cdot\cdot\lambda}_{ak}\xi^{a}_{\cdot j} + H^{\cdot\cdot\lambda}_{ja}\xi^{a}_{\cdot k}]dt\,.$$

De même, pour la variation $\varDelta L^{i}_{\cdot k\lambda}$, on obtient

$$(2.19) \qquad \varDelta L^{i}_{\cdot k\lambda} = [L^{i}_{\cdot k\lambda;h}\xi^{h} - L^{a}_{\cdot k\lambda}\xi^{i}_{\cdot a} + L^{i}_{\cdot a\lambda}\xi^{a}_{\cdot j}]dt\,.$$

Les équations (2.18) et (2.19) peuvent s'obtenir aussi de la manière suivante:

Considérons un vecteur contrevariant $H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}u^{j}v^{k}$ de A_n, u^{i} et v^{i} étant deux vecteurs contrevariants tout à fait arbitraires de A_m.

L'opérateur $\varDelta$ appliqué à une grandeur de A_n signifiant la dérivée covariante le long du sous-espace, on a, d'une part,

$$\varDelta(H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}u^{j}v^{k}) = [H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk;h}u^{j}v^{k} + H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}u^{j}_{;h}v^{k} + H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}u^{j}v^{k}_{;h}]\xi^{h}dt\,,$$

l'opérateur $\varDelta$ appliqué à une grandeur de A_m désignant la dérivée de Lie, on a, d'autre part,

$$\begin{aligned}\varDelta(H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}u^{j}v^{k}) = (\varDelta H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk})u^{j}v^{k} &+ H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}(u^{j}_{;h}\xi^{h} - u^{h}\xi^{j}_{\cdot h})v^{k}dt \\ &+ H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}u^{j}(v^{k}_{;h}\xi^{h} - v^{h}\xi^{k}_{\cdot h})dt\,,\end{aligned}$$

d'où, en comparant ces deux équations, on retrouve (2.18). Il en est le même pour $\varDelta L^{i}_{\cdot k\lambda}$.

Les equations (2.18) et (2.19) nous suggèrent une loi de l'opération $\varDelta$ appliqué à un tenseur mixte tel que $H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}$ dans le cas de la déformation infinitésimale tangentielle. Les variations $\varDelta B^{\cdot\lambda}_{i}$ et $\varDelta B^{i}_{\cdot\lambda}$ de $B^{\cdot\lambda}_{i}$ et $B^{i}_{\cdot\lambda}$ peuvent être aussi obtenues respectivement d'après cette loi.

Cela étant, nous allons calculer les variations des tenseurs de courbure dans le cas de la détormation infinitesimale tangentielle.

Pour cela, substituons (2.15) dans (1.24). On aura

$$(2.20)\quad \Delta R^{i}_{.jkh}=(R^{i}_{.jkh;a}\xi^{a}-R^{a}_{.jkh}\xi^{i}_{.a}+R^{i}_{.akh}\xi^{a}_{.j}+R^{i}_{.jah}\xi^{a}_{.k}+R^{i}_{.jka}\xi^{a}_{.h})dt\,.$$

L'équation (2.20) peut aussi s'obtenir de (1.25) en tenant compte de (2.5), (2.11), (2.18) et (2.19).

Enfin, pour trouver la variation du tenseur de courbure de A^{n-m}_{n}, substituons (2.17) dans

$$\Delta R^{P}_{.Qkh}=(\Delta\Gamma^{P}_{Qk})_{;h}-(\Delta\Gamma^{P}_{Qh})_{;k}+(\Delta\Gamma^{P}_{Qa})S^{a}_{.kh}\,.$$

Alors, on obtiendra

$$(2.21)\quad \begin{aligned}\Delta R^{P}_{.Qkh}=[&R^{P}_{.Qkh;a}\xi^{a}-R^{S}_{.Qkh}\zeta^{.P}_{S}+R^{P}_{.Skh}\zeta^{.S}_{Q}\\ &+R^{P}_{.Qah}\xi^{a}_{.k}+R^{P}_{.Qka}\xi^{a}_{.h}]dt\,.\end{aligned}$$

Cette équation peut aussi s'obtenir de (1.26) en tenant compte des équations (2.5), (2.11) et

$$(2.22)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta H^{..P}_{jk}&=[H^{..P}_{jk\,;h}\xi^{h}-H^{..Q}_{jk}\zeta^{.P}_{Q}+H^{..P}_{ak}\xi^{a}_{.j}+H^{..P}_{ja}\xi^{a}_{.k}]dt\,,\\ \Delta L^{i}_{.kP}&=[L^{i}_{.kP;h}\xi^{h}+L^{i}_{.kQ}\zeta^{.Q}_{P}-L^{a}_{.kP}\xi^{i}_{.a}+L^{i}_{.aP}\xi^{a}_{.k}]dt\,,\end{aligned}\right.$$

les deux dernières étant les conséquences immédiates de (2.10), (2.13), (2.18) et (2.19).