29. *Bemerkungen über infinitesimale Deformationen eines Raumes.**

Von Kentaro YANO.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., March 12, 1945).

§ 0. Seitdem T. Levi-Civita[1] seine berühmte Arbeit über geodätische Abweichung veröffentlichte, sind die infinitesimalen Deformationen der Kurven in Riemannschem oder in allgemeinem metrischem Raum von J. L. Synge[2], V. Hlavatý[3], A. J. McConnell[4], H. A. Hayden[5] u. a. untersucht worden. Die Theorie der infinitesimalen Transformationen sind dann von J. A. Schouten[6], E. Bortolotti[7], H. A. Hayden[8], E. T. Davies[9], P. Dienes[10] und A. G. Walker[11] für einen Unterraum in Riemannschem, in allgemeinem metrischem Raum oder noch

* Diese Forschung wurde auf Kosten der Ausgaben des Unterrichtsministeriums für wissenschaftliche Forschung ausgeführt.

1) T. Levi-Civita: Sur l'écart géodésique. Math. Ann., **97** (1927), 291–320. Vgl. auch J. L. Synge: On the geometry of dynamics. Phil. Trans. Roy. Soc., **226** (1926), 33–106; E. Cartan: Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes. Rend. Accad. Lincei, **5** (1927), 609–613; J. A. Schouten: Quelques remarques sur l'écart géodésique et des problèmes pareils. C. R., **185** (1927), 1096–1098; M. S. Knebelman: Collineations and motions in generalized spaces. Amer. Journal of Math., **51** (1929), 527–564.

2) J. L. Synge: The first and second variations of the length integral. Proc. London Math. Soc., **25** (1926), 247–264; The displacement or deviation of circles in Riemannian space. Proc. Roy. Irish Acad., **39** (1929–1930), 10–20.

3) V. Hlavatý: Sur la déformation infinitésimale d'une courbe dans une variété métrique avec torsion. Bull. de la Soc. Math. de France, **61** (1928), 18–25.

4) A. J. McConnell: The variations of curvatures in the deformation of a curve. Proc. Roy. Irish Acad., **39** (1929), 1–9.

5) H. A. Hayden: Deformations of a curve, in a Riemann n-space, which displace certain vectors parallelly at each point. Proc. London Math. Soc., **32** (1931), 321–336; On a generalized helix in a Riemannian n-space. ibidem, 337-345.

6) J. A. Schouten: On the infinitesimal deformations of a V_m in a V_n. Proc. Kon. Akad. v. Wetenschappen, Amsterdam, **31** (1928), 208–218.

7) E. Bortolotti: Scostamento geodetico e sue generalizzazioni. Giornale di Mat., **66** (1928), 153–186.

8) H. A. Hayden: Infinitesimal deformations of sub-spaces in a general metrical space. Proc. London Math. Soc., **37** (1934), 416–440; Infinitesimal deformations of an L_m in an L_n. ibidem, **41** (1936), 332–336.

9) E. T. Davies: On the deformation of a subspace. Journal of the London Math. Soc., **11** (1936), 295–301; On the second and third fundamental forms of a subspace. ibidem, **12** (1937), 290-295.

10) P. Dienes und E. T. Davies: On the infinitesimal deformations of tensor submanifolds. Journal de Math., **16** (1937), 111–150.

11) A. G. Walker: On small deformations of subspaces of a flat space. Proc. Edinburgh Math., Soc., **3** (1932), 77–86.

allgemeiner in allgemeinem affinem Raum mit Torsion weiter verallgemeinert worden.

Andererseits untersuchte W. Slebodzinski[1] diejeniegen infinitesimalen Deformationen eines Raumes selbst mit einer affinen Übertragung, welche die sämtlichen mittels der affinen Übertragung des Raumes definierten Eigenschaften unverändert bleiben lassen; er nannte sie isomorphe Transformationen.

D. van Dantzig[2] hat darauf hingewiesen, dass der Raum mit einer affinen Übertragung, der den Raum mit einer projektiven Übertragung[3] darstellt, eine isomorphe Transformation zulässt, indem er gezeigt hat, dass das sogenannte Lie-sche Differential der affinen Übertragung dabei verschwinden muss. Die Slebodzinskische isomorphe Transformation wurde von L. P. Eisenhart[4] sowie von M. S. Knebelman[5] affine Kollineation genannt. Die Theorie der infinitesimalen Transformationen des Raumes wurde danach von J. A. Schouten und E. R. van Kampen[6] systematisch entwickelt; sie haben nämlich insbesondere gezeigt, dass wir bei Betrachtung einer durch

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda dt \tag{0.1}$$

definierten infinitesimalen Deformation des Raumes, die einen Punkt $P(x)$ in einen benachbarten Punkt $Q(x+\xi dt)$ bringt, am Punkte Q drei verschiedene Werte eines Vektors v^λ gewinnen: erstens

$$v^\lambda + v^\lambda{}_{,\nu}\xi^\nu dt = v^\lambda + \overset{1}{d}v^\lambda,^{7)} \tag{0.2}$$

der den Feldwert von v^λ an Q darstellt, zweitens

$$v^\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} v^\mu \xi^\nu dt = v^\lambda + \overset{2}{d}v^\lambda, \tag{0.3}$$

der den durch Parallelismus von P nach Q verschobenen Vektor bedeutet, und letztens

$$v^\lambda + \xi^\lambda{}_{,\nu} v^\nu dt = v^\lambda + \overset{3}{d}v^\lambda, \tag{0.4}$$

der den durch (0.1) von P nach Q mitgeschleppten Vektor ausdrückt. Alle Differenzen zwischen ihnen

---

1) W. Slebodzinski: Sur les transformations isomorphiques d'une variété à connexion affine. Prace Mat. Fiz., **39** (1932), 55–62.

2) D. van Dantzig: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie, II. X_{n+1} mit eingliedriger gruppe. Proc. Kon. Akad. Amsterdam, **35** (1932), 535–542.

3) D. van Dantzig: Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume. Math. Ann., **106** (1932), 400–454.

4) L. P. Eisenhart: Non Riemannian geometry. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. VIII.

5) M. S. Knebelman: Collineations and motions in generalized spaces, a.a.O.

6) J. A. Schouten und E. R. van Kampen: Beiträge zur Theorie der Deformation, Prace Mat. Fiz., **41** (1933), 1–19.

7) Komma bedeutet hierbei die übliche partielle Differentiation, dagegen Semikolon die kovariante Differentiation.

(0.5) $$\overset{(rs)}{d}\, v^\lambda = (\overset{r}{d} - \overset{s}{d}) v^\lambda = \overset{(rs)}{D}\, v^\lambda dt \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

sind die kontravarianten Vektoren wie v^λ. Hierbei bedeutet $\overset{(12)}{D}\, v^\lambda dt$, $\overset{(13)}{D}\, v^\lambda dt = \overset{L}{D} v^\lambda dt$ und $\overset{(23)}{D}\, v^\lambda dt$ das kovariante, Liesche bzw. scheinbare Differential von v^λ. Die Slebodzinskische isomorphe Transformation lässt sich durch Verschwinden des Lieschen Differentials der affinen Übertragung $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ charakterisieren. Das scheinbare Differential wurde schon von A. J. McConnell und von H. A. Hayden in ihren oben zitierten Arbeiten über infinitesimale Deformationen der Kurven benutzt. Seit Veröffentlichung der Arbeit von J. A. Schouten und E. R. van Kampen ist das sogenannte Liesche Differential in einem Raum mit einer affinen Übertragung von E. T. Davies[1], P. Dienes[2] und N. Coburn[3] weiter untersucht und sogar von E. T. Davies[4] für den verallgemeinerten metrischen Raum verallgemeinert worden.

J. A. Schouten und E. R. van Kampen behandelten, als eine Anwendung ihrer Theorie, die infinitesimalen Deformationen eines nichtholonomen Raumes; ihre Untersuchung ist demnach von E. T. Davies[5] fortgesetzt worden.

Es scheint jedoch dem Verfasser, dass diese Theorien mehr oder weniger von formalem Charakter sind. Darum soll nun eine Methode angegeben werden, wodurch sich das Wesen der Theorie der Deformation mehr geometrisch erkennen lässt. Es gibt zwar noch eine andere Methode, die uns diejeniege Theorie der Deformation mehr intuitiv übersehen lässt, welche darin besteht, dass wir tangentiale Deformation eines in einem gewöhnlichen Raum ohne Krümmung eingebetteten Unterraumes betrachten und sie dabei für die Deformation des eingebetteten Raumes *selbst* ansehen; aber Einzelheiten sollen an anderem Orte angegeben werden.

§ 1. In einem n-dimensionalen Raum A_n mit einer affinen Übertragung, der die Übertragungsparameter $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$ sowie den Torsionstensor

(1.1) $$S^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$$

besitzt, betrachten wir jetzt eine infinitesimale Deformation

(1.2) $$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda dt,$$

1) E. T. Davies: On the infinitesimal deformations of a space. Annali di Mat., **12** (1933–1934), 145–151.

2) P. Dienes: On the deformation of tensor manifolds. Proc. London Math. Soc., **37** (1934), 512–519.

3) N. Coburn: A characterization of Schouten's and Hayden's deformation methods. Journal of the London Math. Soc., **15** (1940), 123–136.

4) E. T. Davies: Lie derivation in generalized metric space. Annali di Mat., **18** (1939), 261–274.

5) E. T. Davies: On the deformation of the tangent m-plane of a V_n^m. Proc. Edinburgh Math. Soc., **5** (1938), 202–206.

die den Funkt x^λ in den benachbarten Punkt $\bar{x}^\lambda$ bringt, worin dt eine infinitesimale Grösse bedeutet. Hierbei soll wie üblich nur die Grössen erster Ordnung bezüglich dt in Betracht genommen werden.

Wir betrachten nun einen kontravarianten Vektor v^λ, und gewinnen den mitgeschleppten Vektor wie im folgenden: Da der Funkt x^λ durch (1.2) in den Punkt $x^\lambda+\xi^\lambda dt$ gebracht wird, so geht dabei der Punkt $x^\lambda+v^\lambda\varepsilon$, der auf dem Vektor v^λ und in unendlicher Nähe von x^λ liegt, in den Punkt $x^\lambda+v^\lambda\varepsilon+(\xi^\lambda+\xi^\lambda{}_{,\nu}v^\nu\varepsilon)dt$ über. Wir können also denken, dass der durch

$$[(x^\lambda+v^\lambda\varepsilon)-x^\lambda]/\varepsilon$$

an x^λ gegebene Vektor v^λ in den Vektor

$$\bar{v}^\lambda(\bar{x})=[\{x^\lambda+v^\lambda\varepsilon+(\xi^\lambda+\xi^\lambda{}_{,\nu}v^\nu\varepsilon)dt\}-\{x^\lambda+\xi^\lambda dt\}]/\varepsilon$$

oder

$$\bar{v}^\lambda(\bar{x})=v^\lambda+\xi^\lambda{}_{,\nu}v^\nu dt \tag{1.3}$$

übergegangen ist. Andererseits, wenn wir uns zuvor auf ein Vektorfeld $v^\nu(x)$ bezogen haben, so können wir an $x^\lambda+\xi^\lambda dt$ den zugehörigen Feldwert

$$v^\lambda(\bar{x})=v^\lambda(x+\xi dt)=v^\lambda(x)+v^\lambda{}_{,\nu}\xi^\nu dt$$

betrachten, und die Differenz beider Grössen beträgt also

$$Dv^\lambda=[v^\lambda{}_{,\nu}\xi^\nu-\xi^\lambda{}_{,\nu}v^\nu]dt \tag{1.4}$$

oder, in Tensorform geschrieben,

$$Dv^\lambda=[v^\lambda{}_{;\nu}\xi^\nu-\xi^\lambda{}_{;\nu}v^\nu-S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}v^\mu\xi^\nu]dt. \tag{1.5}$$

Sie stellt nichts anderes als das sogenannte Liesche Differential von v^λ in der durch ξ^λ gegebenen Richtung dar. Um nun das Liesche Differential eines kovarianten Vektorfeldes u_λ zu definieren, nehmen wir hierbei an, dass das Liesche Differential eines Skalars f mit dem üblichen in der Richtung ξ^λ genommen Differential übereinstimme und der Operator D sich nach demselben Gesetz wie dem für die übliche Differentiation regle. Für einen beliebigen kontravarianten Vektor v^λ ergibt sich demnach

$$D(u_\mu v^\mu)=d(u_\mu v^\mu) \tag{1.6}$$

und folglich

$$(Du_\mu)v^\mu+u_\mu(Dv^\mu)=[(u_{\mu,\nu}\xi^\nu)v^\mu+u_\mu(v^\mu{}_{,\nu}\xi^\nu)]dt.$$

Einsetzen von (1.4) in die letzte Gleichung zieht nach sich wegen der Willkürlichkeit von v^λ die Beziehung

$$Du_\mu=[u_{\mu,\nu}\xi^\nu+\xi^\lambda{}_{,\mu}u_\lambda]dt \tag{1.7}$$

oder, wiederum in Tensorform geschrieben,

$$Du_\mu=[u_{\mu;\nu}\xi^\nu+\xi^\lambda{}_{;\mu}u_\lambda+S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}u_\lambda\xi^\nu]dt. \tag{1.8}$$

Die letzte Tensorform lässt sich unmittelbar auch mit Berücksicht auf die Gleichungen

$$(1.9)\qquad D(u_\mu v^\mu)=d(u_\mu v^\mu)=\delta(u_\mu v^\mu)$$

herleiten, wo δ das kovariante Differential in der durch ξ^λ bestimmten Richtung bedeutet; hierbei ist die zweite Gleichheit eine direkte Folgerung aus der Eigenschaft, dass das kovariante Differential für eine skalare Funktion gerade dem üblichen gleich ist. Aus der Gleichung (1.9) ergibt sich nämlich

$$(Du_\mu)v^\mu+u_\mu(Dv^\mu)=[(u_{\mu;\nu}\xi^\nu)v^\mu+u_\mu(v^\mu{}_{;\nu}\xi^\nu)]\,dt\,.$$

Setzen wir dann (1.5) in diese Gleichung ein, so erhalten wir in der Tat die Beziehungen (1.8).

Auf einen allgemeinen Tensor $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ wenden wir nun mittels drei beliebiger Vektoren u_λ, v^λ, w^λ dasselbe Verfahren wie oben an. Aus der Annahme

$$D(T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}u_\lambda v^\mu w^\nu)=d(T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}u_\lambda u^\mu w^\nu)$$

folgt dann

$$(1.10)\qquad DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}=[T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu,\omega}\xi^\omega-T^{\omega}_{\cdot\mu\nu}\xi^\lambda{}_{,\omega}+T^{\lambda}_{\cdot\omega\nu}\xi^\omega{}_{,\mu}+T^{\lambda}_{\cdot\mu\omega}\xi^\omega{}_{,\nu}]\,dt$$

oder, wieder in Tensorform umgeschrieben,

$$(1.11)\qquad \begin{aligned} DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}=[&T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu;\omega}\xi^\omega-T^{\omega}_{\cdot\mu\nu}\xi^\lambda{}_{;\omega}+T^{\lambda}_{\cdot\omega\nu}\xi^\omega{}_{;\mu}+T^{\lambda}_{\cdot\mu\omega}\xi^\omega{}_{;\nu}\\ &-T^{\omega}_{\cdot\mu\nu}S^{\lambda}_{\cdot\omega\pi}\xi^\pi+T^{\lambda}_{\cdot\omega\nu}S^{\omega}_{\cdot\mu\pi}\xi^\pi+T^{\lambda}_{\cdot\mu\omega}S^{\omega}_{\cdot\nu\pi}\xi^\pi]\,dt\,. \end{aligned}$$

Dieselbe Tensorform lässt sich auch aus der Beziehung

$$D(T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}u_\lambda v^\mu w^\nu)=\delta(T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}u_\lambda v^\mu w^\nu)$$

unmittelbar gewinnen.

§ 2. Die Lieschen Differentiale der Vektoren sowie der Tensoren sind hiermit wohlbestimmt, und wir sollen nun das Liesche Differential der affinen Übertragung definieren wie im folgenden.

Betrachten wir zum Zwecke zuerst einen kontravarianten Vektor v^λ an einem Punkte x^λ und schieben ihn parallel in den benachbarten Punkt $x^\lambda+dx^\lambda$, so ergibt sich an $x^\lambda+dx^\lambda$ ein Vektor

$$\tilde{v}^\lambda(x+dx)=v^\lambda(x)-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}v^\mu dx^\nu.$$

Bei der infinitesimalen Deformation (1.2) des Raumes, werden diese Vektoren $v^\lambda(x)$ und $\tilde{v}^\lambda(x+dx)$ an x^λ bzw. $x^\lambda+dx^\lambda$ in die Vektoren

$$(2.2)\qquad \bar{v}^\lambda(\bar{x})=v^\lambda+\xi^\lambda{}_{,\mu}v^\mu dt$$

bzw.

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} \bar{\tilde{v}}^\lambda(\bar{x}+d\bar{x})&=v^\lambda-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}v^\mu dx^\nu+(\xi^\lambda{}_{,\mu}+\xi^\lambda{}_{,\mu,\nu}dx^\nu)(v^\mu-\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}v^\beta dx^\gamma)dt\\ &=v^\lambda-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}v^\mu dx^\nu+\xi^\lambda{}_{,\mu}v^\mu dt+[\xi^\lambda{}_{;\mu,\nu}-\xi^\lambda{}_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}]v^\mu dx^\nu dt \end{aligned}$$

an

$$\bar{x}^\lambda=x^\lambda+\xi^\lambda dt\quad\text{bzw.}\quad \bar{x}^\lambda+d\bar{x}^\lambda=x^\lambda+\xi^\lambda dt+(dx^\lambda+\xi^\lambda{}_{,\nu}dx^\nu dt)$$

mitgeschleppt. Wir bezeichnen mit $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\bar{x})$ die Übertragungsparameter des mitgeschleppten Raumes und setzen dann

$$(2.4)\qquad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\bar{x})-\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}(\bar{x})=D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,;$$

hierbei nehmen wir weiter an, dass beide Vektoren $\bar{v}^\lambda(\bar{x})$ und $\bar{\bar{v}}^\lambda(\bar{x}+d\bar{x})$ in bezug auf die neu entstandene affine Übertragung $\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(\bar{x})$ voneinander parallel seien.

Da $\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(\bar{x})$ durch

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(\bar{x})=\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\bar{x})-D\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$$

gegeben werden, so erhalten wir infolge

$$\bar{\bar{v}}^\lambda(\bar{x}+d\bar{x})-\bar{v}^\lambda(\bar{x})=-\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(\bar{x})\bar{v}^\mu(\bar{x})d\bar{x}^\nu$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned}
&-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}v^\mu dx^\nu+[\xi^\lambda{}_{,\mu,\nu}-\xi^\lambda{}_{,\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}]v^\mu dx^\nu dt\\
&=(-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}-\Gamma^\lambda_{\mu\nu,\omega}\xi^\omega dt+D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\,(v^\mu+\xi^\mu{}_{,\alpha}v^\alpha dt)\,(dx^\nu+\xi^\nu{}_{,\beta}dx^\beta dt)\\
&=-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}v^\mu dx^\nu-\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\xi^\alpha{}_{,\nu}v^\mu dx^\nu dt-\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\xi^\alpha{}_{,\mu}v^\mu dx^\nu dt\\
&\qquad-\Gamma^\lambda_{\mu\nu,\omega}\xi^\omega v^\mu dx^\nu dt+D\Gamma^\lambda_{\mu\nu}v^\mu dx^\nu,
\end{aligned}$$

woraus $D\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sich in die Gestalt

$$D\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=[\xi^\lambda{}_{,\mu,\nu}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu,\omega}\xi^\omega-\xi^\lambda{}_{,\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}+\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\xi^\alpha{}_{,\nu}+\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\xi^\alpha{}_{,\mu}]dt\,, \tag{2.5}$$

oder in die damit äquivalente Tensorform

$$D\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=[(\xi^\lambda{}_{;\mu}+S^\lambda_{\cdot\mu\omega}\xi^\omega)_{;\nu}+R^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega]dt \tag{2.6}$$

bringen lässt, welche gerade das Liesche Differential von $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ liefert.

§ 3. Wir haben in § 1 das Liesche Differential Dv^λ eines kontravarianten Vektors v^λ durch die Differenz

$$v^\lambda(\bar{x})-\bar{v}^\lambda(\bar{x})=Dv^\lambda$$

definiert. Darauf hin gilt am Punkte x

$$v^\lambda(x)-\bar{v}^\lambda(x)=-Dv^\lambda,$$

nämlich

$$\bar{v}^\lambda(x)=v^\lambda(x)+Dv^\lambda \tag{3.1}$$

Ganz ähnlich ergeben sich der Reihe nach

$$\bar{u}_\lambda(x)=u_\lambda(x)+Du_\lambda \tag{3.2}$$

für einen kovarianten Vektor u_λ,

$$\bar{T}^\lambda_{\cdot\mu\nu}(x)=T^\lambda_{\cdot\mu\nu}(x)+DT^\lambda_{\cdot\mu\nu} \tag{3.3}$$

für einen gemischten Tensor $T^\lambda_{\cdot\mu\nu}$, und

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(x)=\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)+D\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{3,4}$$

für die affine Übertragung $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Nach unserer Definition von $D\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ erhalten wir

$$\bar{\delta}\bar{v}^\lambda=\delta v^\lambda+D(\delta v^\lambda)\,, \tag{3.5}$$

wo $\bar{\delta}$ das kovariante Differential bezüglich $\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}=\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+D\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ bedeutet.

Aus Bestehen von

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\bar{v}^\lambda&=d(v^\lambda+Dv^\lambda)+(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\,(v^\mu+Dv^\mu)dx^\nu\\
&=\delta v^\lambda+\delta Dv^\lambda+(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})v^\mu dx^\nu
\end{aligned} \tag{3.6}$$

folgt nun mit Rücksicht auf (3.5) die Relation

$$D(\delta v^\lambda)-\delta(Dv^\lambda)=(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})v^\mu dx^\nu. \tag{3.7}$$

Auf ähnlichem Wege ergibt sich aus

(3.8) $$\overline{\delta u_{\mu}}=\delta u_{\mu}+D(\delta u_{\mu})$$

die Relation

(3.9) $$D(\delta u_{\mu})-\delta(Du_{\mu})=-(D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})u_{\lambda}dx^{\nu}$$

für einen kovarianten Vektor u_{μ}, und weiter lässt sich aus

(3.10) $$\overline{\delta T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}}=\delta T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}+D(\delta T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu})$$

die für einen allgemeinen Tensor $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ geltende Belation

(3.11) $$D(\delta T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu})-\delta(DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu})=[(D\Gamma^{\lambda}_{\alpha\omega})T^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}-(D\Gamma^{\alpha}_{\mu\omega})T^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu}-(D\Gamma^{\alpha}_{\nu\omega})T^{\lambda}_{\cdot\mu\alpha}]dx^{\omega}$$

erhalten.

Es gilt aber stets

(3.12) $$Ddx^{\lambda}=0^{1)}.$$

In der Tat, da im allgemeinen der Punkt x^{λ} bei der Deformation in den Punkt $x^{\lambda}+\xi^{\lambda}dt$ gebracht wird, geht der Punkt $x^{\lambda}+dx^{\lambda}$ dabei in den Punkt $x^{\lambda}+dx^{\lambda}+(\xi^{\lambda}+\xi^{\lambda}{}_{,\nu}dx^{\nu})dt$ über, und folglich beträgt der mitgeschleppte Wert von dx^{λ} gerade

$$dx^{\lambda}+\xi^{\lambda}{}_{,\nu}dx^{\lambda}dt.$$

Wir erhalten andererseits an $x^{\lambda}+\xi^{\lambda}dt$

$$d(x^{\lambda}+\xi^{\lambda}dt)=dx^{\lambda}+\xi^{\lambda}{}_{,\nu}dx^{\nu}dt$$

und schliesslich infolge unserer Definition des Deformationsoperators D die behauptete Relation $Ddx^{\lambda}=0$.

Aus den Relationen (3.7), (3.9) bzw. (3.11) folgen somit nacheinander

(3.13) $$D(v^{\lambda}{}_{;\nu})-(Dv^{\lambda})_{;\nu}=(D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})v^{\mu},$$

(3.14) $$D(u_{\mu;\nu})-(Du_{\mu})_{;\nu}=-(D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})u_{\lambda},$$

(3.15) $$D(T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu;\omega})-(DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu})_{;\omega}=(D\Gamma^{\lambda}_{\alpha\omega})T^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}-(D\Gamma^{\alpha}_{\mu\omega})T^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu}-(D\Gamma^{\alpha}_{\nu\omega})T^{\lambda}_{\cdot\mu\alpha}{}^{2)}.$$

Nach unserer Definition des Operators D erhalten wir nun für eine skalare Funktion f die Beziehung

$$\overline{f_{;\mu;\nu}}=f_{;\mu;\nu}+D(f_{;\mu;\nu}),$$

wo das auf die quergestrichene Grösse angewandte Semikolon die kovariante Differentiation bezüglich $\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}+D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ bedeutet.

Die Formel

$$f_{;\mu;\nu}-f_{;\nu;\mu}=-f_{;\mu}S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$$

sowie die entsprechende Formel bezüglich der quergestrichenen Grössen ziehen nach sich

$$\overline{f}_{;\lambda}\overline{S}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}=f_{;\lambda}S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}+D(f_{;\lambda}S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}).$$

---

1) N. Coburn: A characterization of Schouten's and Hayden's deformation methods, a.a.O.

2) W. Slebodzinski: Sur les transformations isomorphiques d'une variété à connexion affine, a.a.O.

Erinnern wir uns jetzt daran, dass

$$\bar{f}_{;\lambda}=f_{;\lambda}+D(f_{;\lambda})$$

gilt, und dass $f_{;\lambda}$ hierbei beliebig wählbar ist, so erhalten wir schliesslich

$$\bar{S}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}= \qquad +DS^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}\,. \tag{3.16}$$

Nach der Definition von D erhalten wir in ähnlicher Weise die Relation

$$\bar{v}^{\lambda}{}_{;\nu;\omega}=v^{\lambda}{}_{;\nu;\omega}+D(v^{\lambda}{}_{;\nu;\omega})$$

für einen beliebigen kontravarianten Vektor v^{λ}. Aus den Formeln von Ricci

$$v^{\lambda}{}_{;\nu;\omega}-v^{\lambda}{}_{;\omega;\nu}=v^{\mu}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$$

sowie den entsprechenden Formeln für die quergestrichenen Grössen folgt dann

$$\bar{v}^{\mu}\bar{R}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=v^{\mu}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+D(v^{\mu}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega})\,.$$

Erinnern wir uns wiederum an das Bestehen von

$$\bar{v}^{\mu}=v^{\mu}+Dv^{\mu}$$

sowie an die Willkürlichkeit von v^{λ}, so gelangen wir folglich zu

$$\bar{R}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+DR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\,. \tag{3.17}$$

Beide soeben gefundenen Formeln (3.16) und (3.17) fallen gerade mit den von E. T. Davies[1)] durch direkte Berechnung gewonnenen zusammen.

1) E. T. Davies: On the infinitesimal deformations of a space, a.a.O.