27. *Sur la théorie des espaces à hyperconnexion euclidienne, I.**

Par Kentaro YANO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., March 12, 1945.)

§ 0. *Introduction.*

C'est à É. Cartan qu'on doit la notion d'espaces à n dimensions à connexion euclidiènne[1], affine[2], projective[3] ou conforme[4]. Il définit un espace à connexion euclidienne, affine, projective ou conforme comme une variété numérique qui présente, au voisinage immédiat de chaque point, tous les caractères d'un espace ordinaire à groupe euclidien, affine, projectif ou conforme respectivement et qui est, de plus, douée d'une loi permettant de raccorder en un seul espace les deux petits morceaux qui entourent deux points infiniment voisins. En d'autres termes, il associe à chaque point de la variété numérique un espace tangent euclidien, affine, projectif ou conforme, et il donne la loi de raccord des espaces tangents attachés aux deux points infiniment voisins. Suivant que l'espace tangent attaché à chaque point de la variété numérique est à groupe euclidien, affine, projectif ou conforme et par conséquent, suivant que la transformation infinitésimale entre deux espaces tangents attachés aux deux points infiniment voisins est de caractère euclidien, affine, projectif ou conforme, la variété originale s'appelle la variété à connexion euclidienne, affine, projective ou conforme respectivement.

Dans ces théories, le nombre de dimensions de la variété numérique est le même que celui des espaces tangents attachés à chaque point de la variété originale. Mais, on peut généraliser ces théories en attachant les espaces tangents à $m(>n)$ dimensions à chaque point de la variété numérique originale à n dimensions, et en donnant une loi de raccord des espaces tangents attachés aux deux points infiniment voisions. Nous appelons une telle variété l'espace à hyperconnexion eucli-

---

* La dépense de cette recherche fut réglée par le frais du Ministère de l'Instruction Publique pour les recherches scientifiques.

1) E. Cartan: Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Paris, Gauthier-Villars, (1928).

2) E. Cartan: Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Annales de l'Ecole Normale Supérieure, **40** (1923), 325–412.

3) E. Cartan: Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. Paris, Gauthier-Villars, (1937).

4) E. Cartan: Les espaces à connexion conforme. Annales de la Soc. Polonaise de Math., **2** (1923), 171–221.

dienne, affine, projective ou conforme suivant que la transformation infinitésimale entre les espaces tangents attachés aux deux points infiniment voisions est euclidienne, affine, projective ou conforme respectivement.

Cette idée d'espaces à hyperconnexion introduite premièrement par R. König[1] a été développée par L. Schlesinger[2], J. A. Schouten[3], J. H. C. Whitehead[4], A. Kawaguchi[5], V. Hlavatý[6] et les autres, et s'est montrée extrêmement féconde.

Pour interpréter la théorie unitaire des champs physiques à cinq dimensions de Th. Kaluza[7] et O. Klein[8] en se restant toujours dans un espace à quatre dimensions, A. Einstein et W. Mayer[9] ont utilisé un espace à hyperconnexion euclidienne spéciale à quatre dimensions.

Cette théorie des espaces à hyperconnexion euclidienne spéciale à quatre dimensions a été généralisée par A. D. Michal et J. L. Botsford[10] à la théorie des espaces à hyperconnexion affine générale à n dimensions.

D'autre part, le present auteur[11] a montré que l'espace d'Einstein et Mayer à hyperconnexion euclidienne peut être regardé comme une hypersurface non holonome[12] totalement géodésique dans un espace de Riemann à cinq dimensions

---

1) R. König: Beiträge zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., **28** (1920), 213–228.

2) I. Schlesinger: Parallelverschiebung und Krümmungstensor. Math. Ann., **99** (1928), 413–434.

3) J.A. Schouten: On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **27** (1924), 407–424; Erlanger Programm und Übertragungslehre. Rend. Circ. Mat. Palermo, **50** (1926), 142–169.

4) J.H.C. Whitehead: On linear connections. Trans. Amer. Math. Soc., **33** (1931), 191–209.

5) A. Kawaguchi: The foundation of the theory of displacements. Proc. **9** (1933), 351–354.

6) V. Hlavatý: Espaces abstraits courbes de König. Rend. Circ. Mat. Palermo, **59** (1935), 1–39.

7) Th. Kaluza: Zum Unitätsproblem der Physik. Sitz. preuss. Akad. Wiss., (1921), 966–972.

8) O. Klein: Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Zeitschr. für Physik, **37** (1926), 895–906; Zur fünfdimensionalen Darstellung der Relativitätstheorie. Zeitschr. für Physik, **46** (1927), 188–208.

9) A. Einstein et W. Mayer: Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität. Sitz. preuss. Akad. Wiss., (1931), 541–557; (1932), 130–137.

10) A.D. Michal et J.L. Botsford: On extension of the new Einstein geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **18** (1932), 554–558; Geometries involving affine connections and general linear connections. An extension of the recent Einstein-Mayer geometry. Annali di Mat., **12** (1934), 13–22.

11) K. Yano: Sur les espaces non holonomes totalement géodésiques. C.R. Acad. Sci. Paris, **205** (1937), 9–12; La relativité non holonome et la théorie unitaire d'Einstein et Mayer. Mathematica, **14** (1938), 124–132.

12) G. Vranceanu: Les espaces non holonomes. Mémorial des Sciences Math., (1936); Sur une théorie non holonome des champs physiques, Journal de Physiques, **7** (1936), 514–526.

satisfaisant aux quelques conditions qui caractérisent l'espace de Kaluza et Klein à cinq dimensions. Il a montré aussi, en collabolation avec S. Petrescu[1], que l'espace de Michal et Botsford à hyperconnexion euclidienne peut être regardé comme un sous-espace non holonome totalement géodésique dans un espace de Riemann.

Ainsi, nous semble-t-il que la théorie des espaces à hyperconnexion et celle des espaces non holonomes sont liées l'une à l'autre par une relation très étroite. La théorie des espaces non holonomes a été déjà suffisamment étudiée par Z. Horak, G. Vranceanu, J. A. Schouten, V. Hlavatý, J. L. Synge, A. Wundheiler et par les autres[2], et on a actuellement, comme nous avons déjà dit en haut, une belle application de cette théorie à la théorie unitaire des champs physiques. D'autre part, G. Kron[3] a trouvé une belle application de la nouvelle géométrie à l'analyse des machines éléctrique en mouvement. Il utilise surtout les coordonnées non holonomes et les espaces non holonomes métriques[4].

Mais, la théorie des espaces à hyperconnexion n'a pas encore été suffisamment étudiée pour trouver quelques applications à la physique ou à la théorie des machines éléctriques. Le but de cette Note est d'étudier la théorie des espaces à hyperconnexion euclidienne. L'auteur reviendra à l'étude des espaces à hyperconnexion affine, projective[5] ou conforme en d'autres occasions.

§ 1. *L'algèbre tensorielle.*

Considérons un espace V_n à n dimensions décrit par un système de coordonnées (x^i)[6] et dont la forme fondamentale

$$ds^2 = g_{jk}dx^j dx^k \tag{1.1}$$

est définie positive dans tout l'espace V_n, les g_{jk} étant les composantes du tenseur métrique de V_n. On associe, à chaque point de V_n, un espace vectoriel linéaire E_n à n dimensions doué d'un tenseur métrique g_{jk} de manière que le carré de la longueur v d'un vecteur v^i de E_n sera donné par

---

1) K. Yano et St. Petrescu : Sur les espaces métriques non holonomes complémentaires. Disquisitiones Mathematicae et Physicae, **1** (1940), 191–246.

2) En ce qui concerne la bibliographie pour la théorie des espaces non holonomes voir, par exemple, G. Vranceanu: Les espaces non holonomes, déjà cité; J. L. Synge: Tensorial methods in dynamics. The University of Toronto Press, (1936); K. Yano et St. Petrescu: Sur les espaces métriques non holonomes complémentaires, déjà cité ; K. Yano: Les coordonnées non holonomes et les espaces non holonomes, (en japonais) Tokyo-Buturigakko-Zassi, **52** (1943), 277-288.

3) G. Kron: The application of tensor to the analysis of rotating electrical machenery. G.E.R. Press, (1938).

4) G. Kron: Quasi-holonomic dynamical systems, Physics, **7** (1936), 143–152.

5) J. Kanitani a récemment étudié la théorie des espaces à hyperconnexion projective, mais, ses résultats ne sont pas encore publiés.

6) Les indices $\begin{cases} a, b, c, \dots i, j, k, \dots, \\ \alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda, \mu, \nu, \dots, \\ A, B, C, \dots P, Q, R, \dots \end{cases}$ prennent respectivement les valeurs $\begin{cases} 1, 2, \dots, n, \\ 1, 2, \dots, m, \\ n+1 \dots, m. \end{cases}$

(1.2) $$(v)^2 = g_{jk}v^j v^k.$$

A chaque transformation de coordonnées de l'espace

(1.3) $$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

correspond une transformation du repère de E_n, et on peut définir, de la manière bien connue, les grandeurs de V_n d'après ses lois de transformations vis-à-vis des changements de coordonnées.

Cela étant, on associe, à chaque point de V_n, un espace vectoriel linéaire E_m à $m(>n)$ dimensions doué d'un tenseur métrique fondamental $G_{\mu\nu}$ de manière que le carré de la longueur V d'un vecteur V^λ sera donné par

(1.4) $$(V)^2 = G_{\mu\nu}V^\mu V^\nu,$$

la forme quadratique $G_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$ étant supposée définie positive.

Les changements du repère de E_m étant représentés par une matrice $(A_\lambda^{\lambda'})$ et son inverse $(A_{\lambda'}^\lambda)$, on peut définir les grandeurs de E_m, d'après ses lois de transformations vis-à-vis des changements du repère de la manière suivante bien connue:

Le scalaire F du poids p	$F' = (A)^p F,$
Le vecteur contrevariant V^λ du poids p	$V^{\lambda'} = (A)^p A_\lambda^{\lambda'} V^\lambda,$
Le vecteur covariant V_μ du poids p	$V_{\mu'} = (A)^p A_{\mu'}^\mu V_\mu,$
Le tenseur general $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ du poids p	$T^{\lambda'}_{\cdot\mu'\nu'} = (A)^p A_{\lambda\ \mu'\nu'}^{\lambda'\mu\nu} T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu},$

où nous avons désigné par A le déterminant formé avec les $A_{\lambda'}^\lambda$ et par $A_{\lambda\ \mu'\nu'}^{\lambda'\mu\nu}$, les produits $A_\lambda^{\lambda'}A_{\mu'}^\mu A_{\nu'}^\nu$, pour la simplicité.

Cela dit, supposons que l'espace vectoriel linéaire E_m attaché à chaque point de V_n contienne l'espace vectoriel linéaire E_n attaché à ce point de V_n, et prenons, dans E_m, n vecteurs $B_i^{\cdot\lambda}$ contrevariants linéairement indépendants et se trouvant dans E_n de sorte qu'à un vecteur contrevariant v^i de E_n correspond un vecteur contrevariant $V^\lambda = B_i^{\cdot\lambda} v^i$ de E_m. Les $B_i^{\cdot\lambda}$ étant n vecteurs contrevariants de E_m, ses composantes $B_i^{\cdot\lambda}$ se transforment, vis-à-vis un changement du repère de E_m, d'après $B_i^{\cdot\lambda'} = A_\lambda^{\lambda'} B_i^{\cdot\lambda}$.

D'autre part, les composantes $V^\lambda = B_i^{\cdot\lambda} v^i$ d'un vecteur de E_m étant invariantes pendant les transformations de coordonnées (1.3) de V_n, les composantes $B_i^{\cdot\lambda}$ se transforment d'après $B_{i'}^{\cdot\lambda} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} B_i^{\cdot\lambda}$ pendant les transformations de coordonnées (1.3) de V_n. En somme, $B_i^{\cdot\lambda}$ sont n vecteurs contrevariants de E_m par rapport à l'indice λ et m vecteurs covariants par rapport à l'indice i.

En partant des grandeurs $B_i^{\cdot\lambda}$, on peut définir les trois grandeurs suivantes:

(1.5) $$B^{i\lambda} = g^{ij} B_j^{\cdot\lambda}, \quad B_{i\lambda} = G_{\lambda\mu} B_i^{\cdot\mu}, \quad B^{i}_{\cdot\lambda} = g^{ij} G_{\lambda\mu} B_j^{\cdot\mu},$$

de caractères désignés par les positions des indices, où g^{ij} est le tenseur contrevariant fondamental de V_n défini par $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$. On définit de même le tenseur contrevariant fondamental $G^{\lambda\mu}$ de E_m par $G^{\lambda\mu}G_{\mu\nu}=\delta^\lambda_\nu$.

Or, les n vecteurs $B_i^{\cdot\lambda}$ de E_m étant linéairement indépendants, on peut trouver $m-n$ vecteurs linéairement indépendants $B_P^{\cdot\lambda}$ de E_m satisfaisant aux

$$(1.6)\qquad G_{\mu\nu}B_i^{\cdot\mu}B_P^{\cdot\nu}=0\,,$$

soit, $m-n$ vecteurs linéairement indépendants et orthogonaux aux n vecteurs $B_i^{\cdot\lambda}$. Deux systèmes $B_{P'}^{\cdot\lambda}$ et $B_P^{\cdot\lambda}$ de tels vecteurs sont liés l'un à l'autre par les relations $B_{P'}^{\cdot\lambda}=A_{P'}^P B_P^{\cdot\lambda}$ où le déterminant formé avec les $A_{P'}^P$ est supposé non nul.

Si l'on pose

$$(1.7)\qquad G_{\mu\nu}B_P^{\cdot\mu}B_Q^{\cdot\nu}=g_{PQ}\,,$$

les g_{PQ} sont les composantes du tenseur métrique fondamental de l'espace vectoriel linéaire E_{m-n} à $m-n$ dimentions défini par les $m-n$ vecteurs $B_P^{\cdot\lambda}$ linéairement indépendants. Les grandeurs de l'espace E_{m-n} sont définies tout à fait de la même manière que la précédente.

En partant des grandeurs $B_P^{\cdot\lambda}$, on peut définir les trois grandeurs suivantes:

$$(1.8)\qquad B^{P\lambda}=g^{PQ}B_Q^{\cdot\lambda}\,,\quad B_{P\lambda}=G_{\lambda\mu}B_P^{\cdot\mu}\,,\quad B^P_{\cdot\lambda}=g^{PQ}G_{\lambda\mu}B_Q^{\cdot\mu}\,,$$

de caracteres indiqués par les positions des indices, où g^{PQ} est le tenseur contrevariant fondamental de E_{m-n} défini par $g^{PQ}g_{QR}=\delta^P_R$.

Cela posé, considérons la longueur d'un vecteur $V^\lambda=B_i^{\cdot\lambda}v^i$.

Si l'on le regarde comme étant un vecteur de E_m, le carré de sa longueur est donné par

$$(V)^2=G_{\mu\nu}V^\mu V^\nu=G_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu}v^jv^k\,,$$

d'autre part, si l'on le regarde comme étant un vecteur de E_n, le carré de sa longueur est donné par (1.2), donc, si l'on suppose que $V=v$, pour n'importe quel vecteur, on doit avoir

$$(1.9)\qquad G_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu}=g_{jk}\,,$$

ce qui nous donne la relation entre le tenseur fondamental de E_m et celui de V_n.

Les relations (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) et (1.9) nous donnent

$$(1.10)\qquad B^i_{\cdot\lambda}B_k^{\cdot\lambda}=\delta^i_k\,,\quad B^i_{\cdot\lambda}B_P^{\cdot\lambda}=0\,,\quad B^P_{\cdot\lambda}B_k^{\cdot\lambda}=0\,,\quad B^P_{\cdot\lambda}B_Q^{\cdot\lambda}=\delta^P_Q\,.$$

Les equations (1.10) nous montrent que les deux matrices

$$\begin{pmatrix}B^i_{\cdot\lambda}\\ B^P_{\cdot\lambda}\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\begin{pmatrix}B_i^{\cdot\lambda}\\ B_P^{\cdot\lambda}\end{pmatrix}$$

sont les inverses l'une de l'autre, par conséquent, nous avons

$$(1.11)\qquad B_i^{\cdot\lambda}B^i_{\cdot\mu}+B_P^{\cdot\lambda}B^P_{\cdot\mu}=\delta^\lambda_\mu\,,$$

d'où

$$(1.12)\qquad g^{ij}B_i^{\cdot\lambda}B_j^{\cdot\mu}+g^{PQ}B_P^{\cdot\lambda}B_Q^{\cdot\mu}=G^{\lambda\mu}\,,$$

$$(1.13)\qquad g_{ij}B^i_{\cdot\lambda}B^j_{\cdot\mu}+g_{PQ}B^P_{\cdot\lambda}B^Q_{\cdot\mu}=G_{\lambda\mu}\,.$$

§ 2. *L'hyperconnexion euclidienne.*

On sait qu'un espace de Riemann V_n est doué d'une connexion euclidienne sans torsion définie par les symboles de Christoffel $\{^{i}_{jk}\}$, la derivée covariante d'un vecteur contrevariant v^i, par exemple, étant donnée par les formules

$$(2.1)\qquad \delta v^i = dv^i + v^j\{^{i}_{jk}\}dx^k, \qquad v^i{}_{;k} = v^i{}_{,k} + v^j\{^{i}_{jk}\},$$

où la virgule désigne la dérivée partielle par rapport à x^k.

La connexion étant euclidienne et sans torsion, on a

$$(2.2)\qquad g_{jk;h} \equiv g_{jk,h} - g_{ak}\{^{a}_{jh}\} - g_{ja}\{^{a}_{kh}\} = 0,$$

et

$$(2.3)\qquad \{^{i}_{jk}\} = \{^{i}_{kj}\},$$

ceux qui caractérisent la connexion euclidienne sans torsion, où le point-virgule désigne la dérivée covariante.

Cela étant, nous allons définir une connexion euclidienne entre deux espaces vectoriels linéaires à m dimensions attachés aux deux points infiniment voisins de V_n. Une telle connexion est donnée par les fonctions $\Gamma^{\lambda}_{\mu k}$ de x^i, qui se transforment en $\Gamma^{\lambda'}_{\mu' k'}$ d'après

$$(2.4)\qquad \Gamma^{\lambda'}_{\mu' k'} = A^{\lambda'}_{\lambda}(A^{\mu}_{\mu'}\Gamma^{\lambda}_{\mu k} + A^{\lambda}_{\mu',k})\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}$$

pendant un changement de représentation, une représentation étant composée par un repérage dans E_m et un système de coordonnées dans V_n. Les composantes de l'hyperconnexion étant ainsi définies, la dérivée covariante d'un vecteur contrevariant V^{λ} du poids p de E_m, par exemple, est donnée par les formules

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} \delta V &= dV^{\lambda} + V^{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\mu k}dx^k - pV^{\lambda}\Gamma^{a}_{ak}dx^k, \\ V^{\lambda}{}_{;k} &= V^{\lambda}{}_{,k} + V^{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\mu k} - pV^{\lambda}\Gamma^{a}_{ak}. \end{aligned}$$

Or, l'hyperconnexion ainsi définie étant euclidienne, on doit avoir

$$(2.6)\qquad G_{\mu\nu;k} \equiv G_{\mu\nu,k} - G_{a\nu}\Gamma^{a}_{\mu k} - G_{\mu a}\Gamma^{a}_{\nu k} = 0,$$

ce qui correspond au postulat I d'Einstein-Mayer et de Michal-Botsford.

Cela étant, considérons un vecteur contrevariant v^i de V_n, alors sa dérivée covariante est donnée par (2.1). Nous construisons, moyennant v^i, un vecteur contrevariant $V^{\lambda} = B_i^{\cdot\lambda}v^i$ de E_m et considérons sa dérivée covariante par rapport à l'hyperconnexion définie en haut:

$$\delta V^{\lambda} = dV^{\lambda} + V^{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\mu k}dx^k = (dB_j^{\cdot\lambda})v^j + B_i^{\cdot\lambda}dv^i + B_j^{\cdot\mu}v^j\Gamma^{\lambda}_{\mu k}dx^k,$$

par conséquent,

$$(2.7)\qquad \delta V^{\lambda} = B_i^{\cdot\lambda}\delta v^i + (B_j^{\cdot\lambda}{}_{,k} + B_j^{\cdot\mu}\Gamma^{\lambda}_{\mu k} - B_i^{\cdot\lambda}\{^{i}_{jk}\})v^j dx^k.$$

Nous supposerons ici que la projection orthogonale de δV^{λ} sur E_n soit egale à $B_i^{\cdot\lambda}\delta v^i$, en d'autres termes, qu'elle soit égale au vecteur de E_m construit en partant de la dérivée covariante de v^i qui est le vecteur de E_n. Alors, le deuxième terme dans le deuxième membre de (2.7) doit représenter un vecteur orthogonale à E_n pour n'importe quel vecteur v^i et pour n'importe quelle direction dx^k, d'où on a

(2.8) $$B_{j\;;k}^{\cdot\lambda} \equiv H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} \equiv B_{j\;,k}^{\cdot\lambda} + B_j^{\cdot\mu}\Gamma_{\mu k}^{\lambda} - B_i^{\cdot\lambda}\left\{ {i \atop jk} \right\} = H_{jk}^{\cdot\cdot P} B_P^{\cdot\lambda} ,$$

où $H_{jk}^{\cdot\cdot P}$ sont les $m-n$ tenseurs covariants de V_n ainsi définis par rapport aux deux indices inférieures et n^2 vecteurs contrevariants de E_{m-n} par rapport à l'indice P. Ce fait nous donne une interprétation géométrique du postulat II d'Einstein-Mayer et de Michal-Botsford.

Les formules (2.8) nous suggèrent de plus une loi de la dérivée covariante d'une grandeur mixte telle que $B_i^{\cdot\lambda}$, une loi de la dérivée covariante due au fond à van der Waerden et à E. Bortolotti.

Les dérivées covariantes de $G_{\mu\nu}$, $G^{\lambda\mu}$, g_{jk} et g^{ij} étant toutes nulles, on obtient, de (2.8),

$$B^{i\lambda}{}_{;k} = H_{\cdot k}^{i\cdot\lambda} , \qquad B_{i\lambda;k} = H_{ik\lambda} , \qquad B_{\cdot\lambda;k}^{i} = H_{\cdot k\lambda}^{i} ,$$

où

$$H_{\cdot k}^{i\cdot\lambda} = g^{ij} H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} , \qquad H_{ik\lambda} = G_{\lambda\mu} H_{ik}^{\cdot\cdot\mu} , \qquad H_{\cdot k\lambda}^{i} = g^{ij} G_{\lambda\mu} H_{jk}^{\cdot\cdot\mu} .$$

Cela étant, considérons un vecteur V^λ de E_m qui est orthogonal à E_n, ou comme on dit, qui se trouve dans l'espace normal E_{m-n}. Alors, V^λ peut être représenté sous la forme $V^\lambda = B_P^{\cdot\lambda} v^P$.

Nous allons considérer la dérivée covariante δV^λ de V^λ. On a

(2.9) $$\delta V^\lambda = (dB_P^{\cdot\lambda}) v^P + B_P^{\cdot\lambda} dv^P + B_P^{\cdot\mu} v^P \Gamma_{\mu k}^{\lambda} dx^k .$$

Considérons la projection orthogonale $B_{\cdot\lambda}^{P}\delta V^\lambda$ de δV^λ sur E_{m-n}:

$$\begin{aligned} B_{\cdot\lambda}^{P}\delta V^\lambda &= B_{\cdot\lambda}^{P}(dB_Q^{\cdot\lambda}) v^Q + dv^P + B_{\cdot\lambda}^{P} B_Q^{\cdot\mu} v^Q \Gamma_{\mu k}^{\lambda} dx^k \\ &= dv^P + B_{\cdot\lambda}^{P}(B_{Q,k}^{\cdot\lambda} + B_Q^{\cdot\mu}\Gamma_{\mu k}^{\lambda}) v^Q dx^k . \end{aligned}$$

Posons

(2.10) $$B_{\cdot\lambda}^{P}(B_{Q,k}^{\cdot\lambda} + B_Q^{\cdot\mu}\Gamma_{\mu k}^{\lambda}) = \Gamma_{Qk}^{P} ,$$

et

(2.11) $$\delta v^P = dv^P + v^Q \Gamma_{Qk}^{P} dx^k .$$

Les équations (2.11) nous donnent la dérivée covariante de v^P.

Les équations (2.10) montrent que

(2.12) $$B_{Q;k}^{\cdot\lambda} = B_{Q,k}^{\cdot\lambda} + B_Q^{\cdot\mu}\Gamma_{\mu k}^{\lambda} - B_P^{\cdot\lambda}\Gamma_{Qk}^{P}$$

sont les vecteurs de E_m contenus dans E_n.

Les formules (2.12) nous suggèrent une loi de différentiation covariante d'un tenseur mixte tel que $B_Q^{\cdot\lambda}$.

Pour trouver la dérivée covariante de g_{PQ}, dérivons $g_{PQ} = G_{\mu\nu} B_P^{\cdot\mu} B_Q^{\cdot\nu}$,

$$g_{PQ,k} = G_{\mu\nu,\omega} B_P^{\cdot\mu} B_Q^{\cdot\nu} B_k^{\cdot\omega} + G_{\mu\nu} B_{P,k}^{\cdot\mu} B_Q^{\cdot\nu} + G_{\mu\nu} B_P^{\cdot\mu} B_{Q,k}^{\cdot\nu} .$$

En substituant $G_{\mu\nu,\omega}$ et $B_{P,k}^{\cdot\mu}$ tirés de (2.6) et de (2.12) respectivement, on trouve, en remarquant que $B_{\cdot\lambda}^{P} B_{Q\;;k}^{\cdot\lambda} = 0$,

(2.13) $$g_{PQ;k} \equiv g_{PQ,k} - g_{RQ}\Gamma_{Pk}^{R} - g_{PR}\Gamma_{Qk}^{R} = 0 ,$$

de même la dérivée covariante de g^{PQ} s'annule.

Or, des équations $G_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}B_{Q}^{\cdot\nu}=0$, on trouve

$$G_{\mu\nu}H_{jk}^{\cdot\cdot\mu}B_{Q}^{\cdot\nu}+G_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}B_{Q\ ;k}^{\cdot\nu}=0\ , \tag{2.14}$$

d'où on obtient

$$B_{\cdot\lambda}^{i}B_{Q\ ;k}^{\cdot\lambda}=-H_{\cdot kQ}^{i}\ ,$$

par conséquent, en tenant compte de $B_{\cdot\lambda}^{P}B_{Q\ ;k}^{\cdot\lambda}=0$, on trouve

$$B_{Q\ ;k}^{\cdot\lambda}=-B_{i}^{\cdot\lambda}H_{\cdot kQ}^{i}\ . \tag{2.15}$$

La formule (2.10) ou la formule (2.15) correspond au postulat III de Michal et Botsford, mais, elle ést un peu plus général que celui de Michal et Botsford qui supposent $B_{Q}^{\cdot\lambda}$ d'être unitaires et orthogonaux entre eux et demandent que le deuxième membre de (2.10) est identiquement nul.

§ 3. *La déterminatism des composantes de l'hyperconnexion.*

Nous avons vu que la connexion de V_n est déterminée par $\{{}^{i}_{jk}\}$ et celle de E_{m-n} par Γ_{Qk}^{P}. Nous allons montrer, dans ce Chapitre, que les composantes de l'hyperconnexion euclidienne de E_m se déterminent en termes de $\{{}^{i}_{jk}\}$, Γ_{Qk}^{P} et $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$, le tenseur qui relie les connexions de V_n et de E_{m-n} à celle de E_m.

Des équations

$$B_{j\ ;k}^{\cdot\lambda}=H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=B_{j\ ,k}^{\cdot\lambda}+B_{j}^{\cdot\mu}\Gamma_{\mu k}^{\lambda}-B_{i}^{\cdot\lambda}\{{}^{i}_{jk}\}\ ,$$

on trouve

$$B_{j}^{\cdot\alpha}\Gamma_{\alpha k}^{\lambda}=H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}-B_{j\ ,k}^{\cdot\lambda}+B_{i}^{\cdot\lambda}\}{}^{i}_{jk}\}\ . \tag{3.1}$$

D'autre part, des équations

$$B_{P\ ;k}^{\cdot\lambda}=-B_{i}^{\cdot\lambda}H_{\cdot kP}^{i}=B_{P\ ,k}^{\cdot\lambda}+B_{P}^{\cdot\mu}\Gamma_{\mu k}^{\lambda}-B_{Q}^{\cdot\lambda}\Gamma_{Pk}^{Q}\ ,$$

on obtient

$$B_{P}^{\cdot\alpha}\Gamma_{\alpha k}^{\lambda}=-B_{i}^{\cdot\lambda}H_{\cdot kP}^{i}-B_{P\ ,k}^{\cdot\lambda}+B_{Q}^{\cdot\lambda}\Gamma_{Pk}^{Q}\ . \tag{3.2}$$

En contractant $B_{\cdot\mu}^{j}$ à (3.1) et $B_{\cdot\mu}^{P}$ à (3.2) et ajoutant, on obtient

$$\Gamma_{\mu k}^{\lambda}=B_{\cdot\mu}^{j}(H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}-B_{j\ ,k}^{\cdot\lambda}+B_{i}^{\cdot\lambda}\{{}^{i}_{jk}\})-B_{\cdot\mu}^{P}(B_{i}^{\cdot\lambda}H_{\cdot kP}^{i}+B_{P\ ,k}^{\cdot\lambda}-B_{Q}^{\cdot\lambda}\Gamma_{Pk}^{Q})\ , \tag{3.3}$$

ce qui est un peu plus général que celui obtenu par Michal et Botsford.