11. Quelques remarques sur les groupes de transformations dans les espaces a connexion linéaire, II.

Par Kentaro YANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.
Kazuo TAKANO.
Kanritsu-Musen-Kosyuzyo, Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., Apr. 12, 1946.)

§ 2. *Collinéations affines.*

Prenons un espace A_n à n dimensions à connexion affine $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ et considérons, dans cet espace, une transformation infinitésimale

(2.1) $$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda(x)\,\delta t,$$

qui déplace chaque point (x^λ) de l'espace en un autre point (x^λ) infiniment voisin de (x^λ).

Nous avons vu, dans le Chapitre précédent[1)], que la connexion affine $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ subit, pendant cette transformation infinitésimale, un changement donné par

(2.2) $$D\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = [(\xi^\lambda_{;\mu} + S^{\lambda}_{.\mu\omega}\,\xi^\omega)_{;\nu} + R^{\lambda}_{.\mu\nu\omega}\,\xi^\omega]\,\delta t,$$

où $S^\lambda_{.\mu\nu}$ et $R^\lambda_{.\mu\nu\omega}$ désignent respectivement le tenseur de torsion et celui de courbure de l'espace, soit,

(2.3) $$S^\lambda_{.\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu},$$

(2.4) $$R^\lambda_{.\mu\nu\omega} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\omega} - \Gamma^\lambda_{\mu\omega,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\alpha\omega} - \Gamma^\alpha_{\mu\omega}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu},$$

la virgule et le point-virgule représentant respectivement la dérivée partielle et la dérivée covariante.

Nous appellerons l'espace déformé $\bar{A}_n$ l'espace dont la connexion affine est définie par

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(x) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) + D\,\Gamma^\lambda_{\mu\nu}.$$

Cela étant, considérons un vecteur contrevariant v^λ dans A_n. Sa dérivée covariante par rapport à la connexion affine $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ est donnée par

$$\delta v^\lambda = dv^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,v^\mu\,dx^\nu.$$

Or, le vecteur correspondant $\bar{v}^\lambda$ de l'espace déformé est donné par

$$\bar{v}^\lambda = v^\lambda + Dv^\lambda,$$

où

$$Dv^\lambda = [\xi^\alpha\,v^\lambda_{;\alpha} - \xi^\lambda_{;\alpha}\,v^\alpha]\,\delta t,$$

---

1) K. Yano: Quelques remarques sur les groupes de transformations dans les espaces à connexion linéaire I. Proc. **22** (1946), 41—47.

et sa dérivée covariante par rapport à la connexion affine déformée $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ est donnée par

$$\bar{\delta}\,\bar{v}^{\lambda} = d\bar{v}^{\lambda} + \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}\bar{v}^{\mu}\,dx^{\nu},$$

d'ou

$$\bar{\delta}\,\bar{v}^{\lambda} = \delta\,v^{\lambda} + \delta\,D\,v^{\lambda} + (D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})\,v^{\mu}\,dx^{\nu}\,.$$

D'autre part, le vecteur correspondant $\overline{\delta v}^{\lambda}$ de l'espace déformé est donné par

$$\overline{\delta v}^{\lambda} = \delta v^{\lambda} + D\,\delta\,v^{\lambda}\,.$$

Les vecteurs $\bar{\delta}\,\bar{v}^{\lambda}$ et $\overline{\delta v}^{\lambda}$ coïncident parce qu'on a

$$D\delta v^{\lambda} - \delta D v^{\lambda} = (D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})\,v^{\mu}\,dx^{\nu}\,, \tag{2.5}$$

comme on peut le vérifier facilement.

Les relations

$$\bar{\delta}\,\bar{v}^{\lambda} = \overline{\delta v}^{\lambda} = \delta v^{\lambda} + D\delta v^{\lambda}\ ^{1)}$$

nous montrent que si un vecteur v^{λ} se déplace par le parallélisme défini par la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ de l'espace original, le vecteur déformé $\bar{v}^{\lambda}$ se déplace par le parallélisme défini par la connexion affine déformée de l'espace déformé. Ce fait peut être utilisé pour définir la variation $D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ de $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$[2].

Si, le vecteur v^{λ} se déplacant parallèlement par rapport à la connexion affine originale $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, le vecteur déformé $\bar{v}^{\lambda}$ se déplace aussi parallèlement par rapport à la même connexion $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, nous dirons que l'espace A_n admet une collinéation affine infinitésimale (2.1). Donc, on a le

Théorème 1: La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace admette une collinéation affine infinitésimale (2.1) est que l'on ait

$$D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0. \tag{2.6}$$

D'autre part, les équations (2.5) nous donnent le

Théorème 2: La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace admette une collinéation affine infinitésimale (2.1) est que l'opérateur D de la dérivée de Lie et celle δ de la dérivée covariante soient échangeable.

Cela étant, dans le cas d'un espace à connexion affine sans torsion, on peut donner deux théorèmes qui caractérisent la collinéation affine infinitésimale. Nous démontrerons d'abord le

Théorème 3: Pour qu'un espace à connexion affine sans torsion admette une collinéation affine infinitésimale (2.1), il faut et il suffit que la déformation infinitésimale (2.1) change chaque path de l'espace en un autre path infiniment

---

1) E. T. Davies: On the infinitesimal deformation of a space. Annali di Mat., *12* (1933–1934), 145–151.

2) K. Yano: Sur la théorie des déformations infinitésimales. Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo, (sous presse).

voisin, les paramètres affines des deux paths étant liés par une transformation affine.

En effet, si un espace admet une collinéation affine infinitésimale, cette transformation infinitésimale conserve toutes les propriétés affines de l'espace. Donc, elle doit déplacer chaque path de l'espace en un autre path infiniment voisin, les paramètres affines des deux paths étant liés par une transformation affine.

Inversement, supposons que la déformation infinitésimale (2.1) déplace chaque path de l'espace en un autre path infiniment voisin de l'espace,, les paramètres affines des deux paths étant liés par une transformation affine. Soient $x^\lambda = x^\lambda(s)$ les équations d'un path arbitraire, s étant un paramètre affine, alors on aura

$$\frac{\delta^2 x^\lambda}{\delta s^2} = \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0. \tag{2.7}$$

La courbe déplacée $\bar{x}^\lambda = x^\lambda(s) + \xi^\lambda(x(s))\,\delta t$ étant aussi un path, désignons par $\bar{s}$ son paramètre affine, alors on a

$$\bar{s} = as + b.$$

Différentiant (2.1) par rapport à s, on trouve

$$\frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}} = \frac{1}{a}(\delta^\lambda_a + \xi^\lambda_{,a}\delta t)\frac{dx^a}{ds} \tag{2.8}$$

et

$$\frac{d^2\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^2} = \frac{1}{a^2}\xi^\lambda_{,\mu,\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t + \frac{1}{a^2}(\delta^\lambda_a + \xi^\lambda_{,a}\delta t)\frac{d^2x^a}{ds^2},$$

$$\frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{\delta\bar{s}^2} = \frac{1}{a^2}(\delta^\lambda_a + \xi^\lambda_{,a}\delta t)\frac{\delta^2 x^a}{\delta s^2} + \frac{1}{a^2}(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}. \tag{2.9}$$

Or, les courbes $\bar{x}^\lambda(\bar{s})$ et $x^\lambda(s)$ étant toutes les deux les paths de l'espace, on doit avoir

$$(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

Ces équations étant valables pour n'importe quel path, on en déduit

$$D\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0,$$

donc, l'espace admet la collinéation affine infinitésimale (2.1) et notre théorème est démontré.

Cela étant, nous allons démontrer ensuite le

Théoreme 4: Pour qu'un espace à connexion affine sans torsion admette une collinéation affine infinitésimale (2.1), il faut et il suffit que la déformation infinitésimale (2.1) change chaque conique affine[1] *de l'espace en une autre conique*

1) K. Yano et K. Takano: Sur les coniques dans les espaces à connexion affine ou projective, I, II. Proc. *20* (1944), 410–417, 418–424.

affine infiniment voisine de la première, les paramètres affines des deux coniques étant liés par une transformation affine.

En effet, si un espace admet une collinéation affine infinitésimale, cette transformation infinitésimale conserve toutes les propriétés affines de l'espace. Donc, elle doit déplacer chaque conique affine de l'espace en une autre conique affine infiniment voisine de la première, les paramètres affines des deux coniques affines étant liés par une transformation affine.

Inversement, supposons que la déformation infinitésimale (2.1) déplace chaque conique affine de l'espace en une autre infiniment voisine de la première, les paramètres affines des deux coniques étant liés par une transformation affine. Soient $x^\lambda = x^\lambda(s)$ les équations d'une conique affine arbitraire, s étant un paramètre affine, alors, on aura

$$\frac{\delta^3 x^\lambda}{\delta s^3} + k\frac{dx^\lambda}{ds} = 0, \tag{2.10}$$

où k est une constante représentant la courbure de la conique, et $\frac{\delta^3 x^\lambda}{\delta s^3}$ désigne la dérivée covariante de $\frac{\delta^2 x^\lambda}{\delta s^2}$ le long de la courbe.

Or, on sait que

$$\frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}} = \frac{1}{a}(\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda{}_{,\alpha}\delta t)\frac{dx^\alpha}{ds},$$

$$\frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{\delta\bar{s}^2} = \frac{1}{a^2}(\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda{}_{,\alpha}\delta t)\frac{\delta^2 x^\alpha}{\delta s^2} + \frac{1}{a^2}(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}.$$

En dérivant la deuxième équation par rapport à s, on trouve

$$\frac{d}{d\bar{s}}\frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{\delta\bar{s}^2} = \frac{1}{a^3}\xi^\lambda{}_{,\mu,\nu}\frac{\delta^2 x^\mu}{\delta s^2}\frac{dx^\nu}{ds} + \frac{1}{a^3}(\delta_\alpha + \xi^\lambda{}_{,\alpha}\delta t)\frac{d}{ds}\frac{\delta^2 x^\alpha}{\delta s^2}$$
$$+ \frac{1}{a^3}(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{,\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds} + \frac{2}{a^3}(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds},$$

d'où

$$\frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{\delta\bar{s}^3} = \frac{1}{a^3}(\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda{}_{,\alpha}\delta t)\frac{\delta^3 x^\alpha}{\delta s^3} + \frac{3}{a^3}(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{\delta^2 x^\mu}{\delta s^2}\frac{dx^\nu}{ds}$$
$$+ \frac{1}{a^3}(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}. \tag{2.11}$$

Or, les courbes $\bar{x}^\lambda(\bar{s})$ et $x^\lambda(s)$ étant toutes les deux coniques affines, on a

$$\frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{\delta\bar{s}^3} = -\bar{k}\frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}} \quad \text{et} \quad \frac{\delta^3 x^\lambda}{\delta s^3} = -k\frac{dx^\lambda}{ds}.$$

Donc, en les substituant dans (2.11) on trouve

$$-a^3\bar{k}\frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}} = -k(\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda{}_{,\alpha}\delta t)\frac{dx^\alpha}{ds} + 3(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{\delta^2 x^\mu}{\delta s^2}\frac{dx^\nu}{ds} + (D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}.$$

Comme ces relations doivent être valables pour n'importe quelles valeurs de $\frac{dx^\lambda}{ds}$ et $\frac{\delta^2 x^\lambda}{\delta s^2}$, on en déduit

$$a^2\bar{k} - k = 0 \quad \text{et} \quad D\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0.$$

Donc, l'espace doit admettre la collinéation affine infinitésimale (2.1) et notre théorème est démontré.

Cela étant, considérons un espace à connexion affine $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ avec torsion admettant une collinéation affine infinitesimale. Si l'on choisit un système de coordonnées dans lequel on a $\xi^{\lambda} = \delta^{\lambda}_{1}$, les équations (2.6) se réduisent aux

$$X \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,1} = 0,$$

ce qui montre que les composantes $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x^{a})$ de la connexion affine sont indépendantes de la variable x^1 dans le système de coordonnées. Donc, si l'espace à connexion affine admet une collinéation affine infinitésimale, il admet un groupe de collinéations affines à un paramètre engendré par cette collinéation affine infinitésimale. Par conséquent, on a le

Théorème 5[1] : ***Pour qu'un espace à connexion affine admette un groupe de collinéations affines à un paramètre, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées dans lequel les composantes de la connexion soient indépendantes d'une des coordonnées x^{λ}.***

Cela étant, considérons, dans l'espace à connexion affine, r transformations infinitésimales

$$\bar{x}^{\lambda} = x^{\lambda} + \xi^{\lambda}_{a}\,\delta t \qquad (a,\ b,\ c, \ldots = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

indépendantes les unes des autres. Alors, on aura

$$(X_b X_c)\, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = X_{bc}\, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \text{ [2]} \tag{2.12}$$

où X_{bc} désigne le symbole défini par le vecteur

$$\xi^{\lambda}_{bc} = \xi^{\alpha}_{b}\xi^{\lambda}_{c;\alpha} - \xi^{\alpha}_{c}\xi^{\lambda}_{b;\alpha}.$$

Donc, on a le

Théoreme 6: ***Si $X_a f$ sont les symboles de r groupes de collinéations affines à un paramètre, $(X_b X_c) f$ sont aussi les symboles des groupes de collinéations affines à un paramètre.***

Si $X_a f$ sont les symboles d'un ensemble compet de r groupes de collinéations affines à un paramètre, on a

$$\xi^{\lambda}_{bc} = \xi^{\alpha}_{b}\xi^{\lambda}_{c;\alpha} - \xi^{\alpha}_{c}\xi^{\lambda}_{b;\alpha} = c_{bc}^{\cdot\cdot a}\,\xi^{\lambda}_{a},$$

et par conséquent, on trouve, de (2.12),

$$(X_b X_c)\, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = c_{bc}^{\cdot\cdot a} X_a\, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}. \tag{2.13}$$

Théoreme 7: ***Si $X_a f$ sont les symboles d'un ensemble complet de r groupes de collinéations affines à un paramétre, les $X_a f$ sont les symboles d'uu groupe de collinéations affines à r paramètres.***

Cela étant, nous allons considérer les conditions d'intégrabilité des équa

1) L. P. Eisenhart: Non-Riemannian Geometry. Coll. Publ. Amer. Math. Soc., Vol. 8; Continuous Groups of Transformations. Princeton Univ. Press, (1933).

2) Voir la première Partie de cette Note déja citée.

tions

$$XΓ^{\lambda}_{\mu\nu} = (\xi^{\lambda}_{;\mu} + S^{\lambda}_{\cdot\mu\omega}\xi^{\omega})_{;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^{\omega} = 0. \tag{2.14}$$

D'abord, des équations

$$XS^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = X(Γ^{\lambda}_{\mu\nu} - Γ^{\lambda}_{\nu\mu}),$$
$$XR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = (DΓ^{\lambda}_{\mu\omega})_{;\nu} - (DΓ^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\omega} + (DΓ^{\lambda}_{\mu a})S^{a}_{\cdot\nu\omega},$$

on déduit

$$XS^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = 0, \qquad XR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0.$$

Ensuite, des équations

$$X(S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu;\beta}) - (XS^{\lambda}_{\cdot\mu\nu})_{;\beta} = S^{a}_{\cdot\mu\nu}(DΓ^{\lambda}_{a\beta}) - S^{\lambda}_{\cdot a\nu}(DΓ^{a}_{\mu\beta}) - S^{\lambda}_{\cdot\mu a}(DΓ^{a}_{\nu\beta}),$$
$$X(R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\beta}) - (XR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega})_{;\beta} = R^{a}_{\cdot\mu\nu\omega}(DΓ^{\lambda}_{a\beta}) - R^{\lambda}_{\cdot a\nu\omega}(DΓ^{a}_{\mu\beta})$$
$$- R^{\lambda}_{\cdot\mu a\omega}(DΓ^{a}_{\nu\beta}) - R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu a}(DΓ^{a}_{\omega\beta}),$$

on déduit

$$X(S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu;\beta}) = 0, \qquad X(R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\beta}) = 0,$$

ainsi de suite. Par conséquent, on a le

Théoreme 8: Pour qu'un espace à connexion affine admette un groupe Xf de collinéations affines, il faut et il suffit qu'il admette un groupe de transformations qui conserve le tenseur de torsion, le tenseur de courbure et ses dérivées covariantes successives.

Cela étant, nous allons considérer les conditions d'intégrabilité complète des équations différentielles

$$XΓ^{\lambda}_{\mu\nu} = \xi^{\lambda}_{\cdot\mu;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^{\omega} = 0.$$

Les conditions d'intégrabilité complète de ces équations sont données par

$$XS^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = \xi^{a}S^{\lambda}_{\cdot\cdot\nu;a} - \xi^{\lambda}_{\cdot a}S^{a}_{\cdot\mu\nu} + \xi^{a}_{\cdot\mu}S^{\lambda}_{\cdot a\nu} + \xi^{a}_{\cdot\nu}S^{\lambda}_{\cdot\mu a} = 0,$$
$$XR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \xi^{a}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;a} - \xi^{\lambda}_{\cdot a}R^{a}_{\cdot\mu\nu\omega} + \xi^{a}_{\cdot\mu}R^{\lambda}_{\cdot a\nu\omega} + \xi^{a}_{\cdot\nu}R^{\lambda}_{\cdot\mu a\omega} + \xi^{a}_{\cdot\omega}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu a} \equiv 0,$$

d'où

$$S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = 0, \qquad R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0.$$

Donc, l'espace à connexion affine doit se réduire à un espace affine ordinaire. Si l'on choisit un système de coordonnés cartésiennes, on a $Γ^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ et les conditions $DΓ^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ nous donnent

$$\bar{x}^{\lambda} = a^{\lambda} + a^{\lambda}_{\mu}\, x^{\mu},$$

par conséquent, le groupe de collinéations affines est le groupe général à $n(n+1)$ paramètres. Par conséquent, on a le

Théorème 9: Pour qu'un espace à connexion affine admette un groupe de collinéations d'ordre maximum, il faut et il suffit que l'espace se réduise à un espace affine ordinaire. Dans ce cas le groupe est le groupe linéaire général.[1]

---

1) L. P. Eisenhart: Contonuous Groups of Transformations, loc. cit.