7. Quelques remarques sur les groupes de transformations dans les espaces à connexion linéaire, I.

Par Kentaro YANO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Mar. 12, 1946.)

§ 0. *Introduction.*

Dans un Mémoire sur la théorie des déformations infinitésimales,[1] le présent auteur a développé une théorie géométrique des dérivées de Lie, et l'a appliquée à la théorie des déformations infinitésimales des sous-espaces dans un espace de Riemann ou dans un espace général à connexion affine avec torsion

Le but de la présente Note est d'appliquer cette théorie aux problèmes des groupes de transformations infinitésimales affines, projectives, isométriques et conformes dans les espaces à connexion linéaire tels qu'on trouve, par exemple, dans les célèbres libres de M.L.P. Eisenhart.[2] Les résultats ne sont pas tous nouveaux, seulement nous les retrouverons par la considération des derivées de Lie des diverses grandeurs.

§ 1. *Généralités sur la dérivée de Lie.*

Considérons, dans un espace à n dimensions rapporté à un système de coordonnées (x^λ), $(\lambda, \mu, \nu, \ldots\ldots = 1, 2, \ldots\ldots, n)$, un groupe continu des transformations à un paramètre défini par les équations finies

$$\bar{x}^\lambda = f^\lambda(x^1, x^2, \ldots, x^n; t), \tag{1.1}$$

la valeur $t = 0$ du paramètre donnant la transformation identique.

On sait que les fonctions $\bar{x}^\lambda$ considérées comme celles de t satisfont à un système des équations différentielles de la forme

$$\frac{d\bar{x}^\lambda}{dt} = \xi^\lambda(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) \tag{1.2}$$

et que la transformation infinitésimale du groupe est dônnée par

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda(x)\,\delta t \tag{1.3}$$

où δt est une constante infinitésimale.

---

1) K. Yano: Sur la théorie des déformations infinitésimales. Journal of the Faculty of Scinnce, Impérial University of Tokyo, (sous presse). Pour abréger nous désignerons dans la suite ce Mémoire par T. D. I.

2) L.P. Eisenhart: Riemannian geometry. Princeton University Press. (1926); Non Riemannian geometry. Coll. Publ. Amer. Math. Soc., Vol. 8, (1927); Continuous groups of transformations. Princeton Univ. Press. (1933).

Si l'on introduit une notation

$$(1.4)\qquad Xf = \xi^{\alpha} f,_{\alpha} \qquad \left(f,_{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}\right),$$

une fonction $f(x^1, \ldots\ldots, x^n)$, par une transformation infinitésimale (1.3), subit un changement

$$(1.5)\qquad Df = f(\bar{x}) - f(x) = Xf\,\delta t.$$

Ici, on considère que $f(x)$ est la composante d'un champ de scalaire defini en tout point de l'espace.

Nous allons généraliser l'opération Df ou Xf, qui a été jusqu'à présent considérée comme ne s'appliquant qu'aux champs de scalaire, à celle qui s'applique non seulement aux champs de scalaire, mais aussi aux champs de tenseurs tout à fait généraux et aussi aux connexions affines, projectives et conformes.

Pour cela, la définition (1.5) de l'opérateur D ou X n'est pas convenante même pour un scalaire f.

La fonction f étant la composante d'un scalaire par rapport au système de coordonnées (x^{λ}), si l'on regarde (1.3) comme une transformation de coordonnées $(x^{\lambda}) \rightarrow (\bar{x}^{\lambda})$, la composante $\bar{f}(\bar{x})$ du même scalaire dans le nouveau système de coordonnées sera donnée par

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x).$$

Donc, la définition (1.5) de l'opérateur D ou X peut s'écrire

$$(1.6)\qquad Df = f(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x}) = Xf\,\delta t.$$

Sous cette forme, la généralisation de l'opération D ou X à celle qui s'applique aux tenseurs généraux ou d'autre objets géométriques n'est pas difficile.

Considérons par exemple un champ de tenseur $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(x)$ defini en tout point de l'espace, alors le changement subit par $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(x)$ quand on éffectue une transformation infinitésimale (1.3) sera défini par les formules de la forme

$$(1.7)\qquad DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(\bar{x}) - \bar{T}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(\bar{x}) = XT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}\,\delta t,$$

où $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(\bar{x})$ sont les valeurs des composantes du tenseur au point $(\bar{x}^{\lambda})$ et $\bar{T}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(\bar{x})$ sont les composantes du tenseur dans le nouveau système de coordonnées quand on regarde (1.3) comme un changement de système de coordonnées $(x^{\lambda}) \rightarrow (\bar{x}^{\lambda})$.

Puisqu'on a

$$T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(\bar{x}^{\lambda}) = T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(x + \xi\,\delta t) = T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(x) + \xi^{\alpha}\,T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu,\alpha}\,\delta t,$$

$$\begin{aligned}\bar{T}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(\bar{x}) &= \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\mu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\nu}}\,T^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma}(x)\\ &= (\delta^{\lambda}_{\alpha} + \xi^{\lambda}_{,\alpha}\,\delta t)(\delta^{\beta}_{\mu} - \xi^{\beta}_{,\mu}\,\delta t)(\delta^{\gamma}_{\nu} - \xi^{\gamma}_{,\nu}\,\delta t)\,T^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma}(x)\\ &= T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}(x) + (\xi^{\lambda}_{,\alpha}\,T^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} - \xi^{\alpha}_{,\mu}\,T^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu} - \xi^{\alpha}_{,\nu}\,T^{\lambda}_{\cdot\mu\alpha})\,\delta t,\end{aligned}$$

on obtient, de (1.7),

$$\begin{aligned}(1.8)\qquad DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} &= XT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}\,\delta t\\ &= [\xi^{a}\,T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu,\,a} - \xi^{\lambda}_{,\,a}\,T^{a}_{\cdot\mu\nu} + \xi^{a}_{,\,\mu}\,T^{\lambda}_{\cdot a\nu} + \xi^{a}_{,\,\nu}\,T^{\lambda}_{\cdot\mu a}]\,\delta t.\end{aligned}$$

Les formules (1.8) nous donnent une généralisation de l'opérateur D ou X à celui qui s'applique aux tenseurs généraux. On verra bien la règle de formation de $DT^{\cdots}_{\cdots}$ en partant d'un tenseur tout à fait général $T^{\cdots}_{\cdots}$. Nous appellerons $DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ la dérivée de Lie du tenseur $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ par rapport au vecteur contrevariant ξ^{λ}.[1]

Si l'espace original était doué d'une connexion affine $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, avec torsion en général, on peut écrire (1.8) sous la forme

$$\begin{aligned}(1.9)\qquad DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} &= XT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}\,\delta t\\ &= [\xi^{a}\,T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\,;\,a} - \xi^{\lambda}_{\cdot a}\,T^{a}_{\cdot\mu\nu} + \xi^{a}_{\cdot\mu}\,T^{\lambda}_{\cdot a\nu} + \xi^{a}_{\cdot\nu}\,T^{\lambda}_{\cdot\mu a}]\,\delta t,\end{aligned}$$

où

$$(1.10)\qquad \xi^{\lambda}_{\cdot a} = \xi^{\lambda}_{;a} + S^{\lambda}_{\cdot a\beta}\,\xi^{\beta} \quad\text{et}\quad S^{\lambda}_{\cdot a\beta} = \Gamma^{\lambda}_{a\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta a},$$

et le point-virgule désigne la derivée covariante par rapport à la connexion affine $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Les formules (1.9) nous montrent que, si $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ est un champ de tenseur, sa dérivée de Lie $DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = XT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}\,\delta t$ est aussi un champ de tenseur du même type. Il est à remarquer que la dérivée de Lie $DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = XT^{\lambda}_{\mu\nu}\,\delta t$ est indépendante de la connexion affine de l'espace comme on le voit de (1.8).

Cela étant, considérons maintenant un groupe continu G_r de transformations à r paramètres defini par les équations finies de la forme

$$(1.11)\qquad \bar{x}^{\lambda} = f^{\lambda}(x^{1}, x^{2}, \ldots, x^{n};\, a^{1}, a^{2}, \ldots, a^{r}),$$

alors les fonctions $\bar{x}^{\lambda}$ considérées comme celles de a^{b} $(a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, r)$ satisfont aux équations de la forme

$$(1.12)\qquad \frac{\partial\,\bar{x}^{\lambda}}{\partial\,a^{b}} = A^{c}_{b}(a)\,\xi^{\lambda}_{c}(\bar{x}).$$

Les fonctions ξ^{λ}_{c} donnent les composantes de r vecteurs contrevariants et définissent r transformations infinitésimales

$$(1.13)\qquad \bar{x}^{\lambda} = x^{\lambda} + \xi^{\lambda}_{b}\,\delta t \quad\text{ou}\quad D_{b}\,x^{\lambda} = \xi^{\lambda}_{b}\,\delta t$$

du groupe.

Par une transformation infinitésimale (1.13), une fonction $f(x^{1}, x^{2}, \ldots, x^{n})$ subit un changement

$$D_{b}f = f(\bar{x}) - f(x) = X_{b}f\,\delta t$$

ou

$$(1.14)\qquad D_{b}f = f(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x}) = X_{b}f\,\delta t,$$

où $\bar{f}(\bar{x})$ a la même signification que celle expliquée en haut.

---

1) Pour une autre définition géométrique de la dérivée de Lie d'un tenseur ou d'une densité, voir K. Yano: T.D.I., § 2, (1).

On sait que si l'on se donne r vecteurs contrevariants ξ^λ_b linéairement indépendants (coéfficients constants), la condition nécessaire et suffisante pour que les $X_b f$ engendrent un groupe continu de transformations à r paramètres est qu'on ait

(1.15) $$(X_b X_c) f = c_{bc}^{\cdot\cdot a} X_a f,$$

où c sont les constantes de structure du groupe satisfaisant aux

$$\begin{cases} c_{bc}^{\cdot\cdot a} + c_{cb}^{\cdot\cdot a} = 0, \\ c_{bc}^{\cdot\cdot e} c_{ed}^{\cdot\cdot a} + c_{cd}^{\cdot\cdot e} c_{eb}^{\cdot\cdot a} + c_{db}^{\cdot\cdot e} c_{ec}^{\cdot\cdot a} = 0, \end{cases}$$

et $(X_b X_c) f$ les parenthèses de Poisson

$$(X_b X_c) f = X_b X_c f - X_c X_b f$$

ou

(1.16) $$(X_b X_c) f = (\xi^a_b \xi^\lambda_{c,a} - \xi^a_c \xi^\lambda_{b,a}) f_{,\lambda},$$

et par suite les conditions (1.15) peuveut s'écrire

(1.17) $$\xi^a_b \xi^\lambda_{c,a} - \xi^a_c \xi^\lambda_{b,a} = c_{bc}^{\cdot\cdot a} \xi^\lambda_a.$$

On désigne habituellement par $X_b \xi^\lambda_c - X_c \xi^\lambda_b$ les quantités entre crochets dans le deuxieme membre de (1.16). Ici on regarde ξ^λ_c comme les composantes des scalaires, mais en réalité ξ^λ_c sont les composantes de r vecteurs contrevariants, et nous avons déjà défini la signification de X_b quand on l'applique aux tenseurs généraux. Donc, il nous semble qu'il faut examiner ce point avec un peu plus de soin.

On a

$$X_c f = \xi^\mu_c f_{,\mu} \delta t.$$

En appliquant l'opérateur X_b à cette équation, on trouve

$$X_b X_c f = (X_b \xi^\mu_c) f_{,\mu} \delta t + \xi^\mu_c (X_b f_{;\mu}) \delta t.$$

D'autre part, d'après la définition de X_b appliqués à un vecteur, on a

$$X_b \xi^\mu_c = \xi^a_b \xi^\mu_{c,a} - \xi^a_c \xi^\mu_{b,a},$$

$$X_b f_{,\mu} = \xi^\nu_b f_{,\mu,\nu} + f_{,a} \xi^a_{b,\mu},$$

donc, on trouve

$$X_b X_c f = (\xi^a_b \xi^\lambda_{c,a} f_{,\lambda}) \delta t + \xi^\mu_b \xi^\nu_c f_{,\mu,\nu} \delta t,$$

et on obtient bien (1.16). Mais, on voit ici que, d'après notre définition de X_b appliqué aux tenseurs, les quantités entre crochets dans le second membre de (1.16) peuvent s'écrire

(1.18) $$X_b \xi^\lambda_c = \xi^a_b \xi^\lambda_{c,a} - \xi^a_c \xi^\lambda_{b,a}.$$

Cela étant, nous allons montrer que les formules (1.15) sont encore valables même quand on remplace le scalaire f par un champ de tenseur général, soit par $T^\lambda_{\cdot\mu\nu}$ par exemple

On a en effect

(1.19) $$X_c T^\lambda_{\cdot\mu\nu} = \xi^\beta_c T^\lambda_{\cdot\mu\nu,\beta} - \xi^\lambda_{c,\beta} T^\beta_{\cdot\mu\nu} + \xi^\beta_{c,\mu} T^\lambda_{\cdot\beta\nu} + \xi^\beta_{c,\nu} T^\lambda_{\cdot\mu\beta}$$

et

(1.20) $$X_b X_c T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = \xi^a_b (X_c T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu})_{,a} - \xi^{\lambda}_{b,a}(X_c T^{a}_{\cdot\mu\nu}) + \xi^{a}_{b,\mu}(X_c T^{\lambda}_{\cdot a\nu}) + \xi^{a}_{b,\nu}(X_c T^{\lambda}_{\cdot\mu a}).$$

En substituant (1.19) dans (1.20), et formant $X_b X_c T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} - X_c X_b T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$, on trouve

$$\begin{aligned}(X_b X_c)\, T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} &= (\xi^{\beta}_b \xi^{a}_{c,\beta} - \xi^{\beta}_c \xi^{a}_{b,\beta})\, T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu,a} \\ &- (\xi^{\beta}_b \xi^{\lambda}_{c,\beta} - \xi^{\beta}_c \xi^{\lambda}_{b,\beta})_{,a}\, T^{a}_{\cdot\mu\nu} \\ &+ (\xi^{\beta}_b \xi^{a}_{c,\beta} - \xi^{\beta}_c \xi^{a}_{b,\beta})_{,\mu}\, T^{\lambda}_{\cdot a\nu} \\ &+ (\xi^{\beta}_b \xi^{a}_{c,\beta} - \xi^{\beta}_c \xi^{a}_{b,\beta})_{,\nu}\, T^{\lambda}_{\cdot\mu a},\end{aligned}$$

d'où

(1.21) $$(X_b X_c)\, T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = (X_b \xi^a_c)\, T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu,a} - (X_b \xi^{\lambda}_c)_{,a}\, T^{a}_{\cdot\mu\nu} + (X_b \xi^a_c)_{,\mu}\, T^{\lambda}_{\cdot a\nu} + (X_b \xi^a_c)_{,\nu}\, T^{\lambda}_{\cdot\mu a}.$$

Donc, on voit que $(X_b X_c)\, T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ est égal à la dérivée de Lie du tenseur $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ par rapport au vecteur contrevariant $X_b \xi^{\lambda}_c$.

Si, les vecteurs ξ^{λ}_a engendrent un groupe G_r à r paramètres, on a

$$X_b \xi^{\lambda}_c = c_{bc}^{\cdot\cdot a}\, \xi^{\lambda}_a,$$

donc, on trouve, des équations précédentes,

(1.22) $$(X_b X_c)\, T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = c_{bc}^{\cdot\cdot a}\, X_a T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}.$$

Cela étant, supposons que l'espace soit doué d'une connexion affine $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ et cherchons la dérivée de Lie

$$D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = X\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\delta t = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\bar{x}) - \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}(\bar{x}),$$

quand on effectue une transformation infinitésimale (1.3). On a

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) + \xi^a\, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,a}\,\delta t,$$

et

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}(\bar{x}) &= \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^a}\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\mu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\nu}}\,\Gamma^{a}_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\nu}}\right) \\ &= (\delta^{\lambda}_a + \xi^{\lambda}_{,a}\,\delta t)\,[(\delta^{\beta}_{\mu} - \xi^{\beta}_{,\mu}\,\delta t)(\delta^{\gamma}_{\nu} - \xi^{\gamma}_{,\nu}\,\delta t)\,\Gamma^{a}_{\beta\gamma} - \xi^{a}_{,\mu,\nu}\,\delta t]\cdot \\ &= \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + (-\xi^{\lambda}_{,\mu,\nu} + \xi^{\lambda}_{,a}\,\Gamma^{a}_{\mu\nu} - \xi^{a}_{,\mu}\,\Gamma^{\lambda}_{a\nu} - \xi^{a}_{,\nu}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu a})\,\delta t,\end{aligned}$$

et par suite

(1.23) $$\begin{aligned}D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= X\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\delta t \\ &= [\xi^{\lambda}_{,\mu,\nu} + \xi^{a}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,a} - \xi^{\lambda}_{,a}\,\Gamma^{a}_{\mu\nu} + \xi^{a}_{,\mu}\Gamma^{\lambda}_{a\nu} + \xi^{a}_{,\nu}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu a}]\,\delta t.\end{aligned}$$

Ces formules nous donnent la généralisation de l'opérateur D ou X à celui qui s'applique à la connexion affine. Nous appellerons $D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ la dérivée de Lie de la connexion affine $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ par rapport à ξ^{λ}.[1)]

Les formules (1.23) peuvent être écrites aussi sous la forme

(1.24) $$D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = [\xi^{\lambda}_{;\mu;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\,\xi^{\omega}]\,\delta t = [(\xi^{\lambda}_{;\mu} + S^{\lambda}_{\cdot\mu a}\,\xi^{a})_{;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\,\xi^{\omega}]\,\delta t,$$

où $R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ désigne le tenseur de courbure formé avec les composantes de la

---

1) K. Yano: T.D.I., § 2, (2). On trouvera là une définition plus géométrique de $D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

connexion affine:

$$R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\omega} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\omega,\nu} + \Gamma^{a}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{a\omega} - \Gamma^{a}_{\mu\omega}\Gamma^{\lambda}_{a\nu}.$$

Les formules (1.24) nous montrent que $D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ ou $X\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ est un tenseur.

Cela étant, en considérant un groupe G_r de transformations à r paramètres engendré par les r transformations infinitésimales $X_a f$, nous allons calculer les parenthèses de Poisson $(X_b X_c)\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ pour la connexion affine. On a

$$X_c\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \xi^{\lambda}_{c,\mu,\nu} + \xi^{\beta}_{c}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\beta} - \xi^{\lambda}_{c,\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + \xi^{\beta}_{c,\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} + \xi^{\beta}_{c,\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}$$

et

$$\begin{aligned} X_b X_c\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \xi^{a}_{b}(X_c\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{,a} - \xi^{\lambda}_{b,a}(X_c\,\Gamma^{a}_{\mu\nu}) + \xi^{a}_{b,\mu}(X_c\,\Gamma^{\lambda}_{a\nu}) \\ + \xi^{a}_{b,\nu}(X_c\,\Gamma^{\lambda}_{\mu a}), \end{aligned}$$

et par suite en formant $X_b X_c\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - X_c X_b\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, on trouve

$$\begin{aligned} (X_b X_c)\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = {} & (\xi^{\beta}_{b}\xi^{\lambda}_{c,\beta} - \xi^{\beta}_{c}\xi^{\lambda}_{b,\beta})_{,\mu,\nu} + (\xi^{\beta}_{b}\xi^{a}_{c,\beta} - \xi^{\beta}_{c}\xi^{a}_{b,\beta})\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,a} \\ & - (\xi^{\beta}_{b}\xi^{\lambda}_{c,\beta} - \xi^{\beta}_{c}\xi^{\lambda}_{b,\beta})_{,a}\,\Gamma^{a}_{\mu\nu} \\ & + (\xi^{\beta}_{b}\xi^{a}_{c,\beta} - \xi^{\beta}_{c}\xi^{a}_{b,\beta})_{,\mu}\,\Gamma^{\lambda}_{a\nu} + (\xi^{\beta}_{b}\xi^{a}_{c,\beta} - \xi^{\beta}_{c}\xi^{a}_{b,\beta})_{,\nu}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu a}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (1.25)\quad (X_b X_c)\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = {} & (X_b\,\xi^{\lambda}_{c})_{,\mu,\nu} + (X_b\,\xi^{a}_{c})\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,a} \\ & - (X_b\,\xi^{\lambda}_{c})_{,a}\,\Gamma^{a}_{\mu\nu} + (X_b\,\xi^{a}_{c})_{,\mu}\,\Gamma^{\lambda}_{a\nu} + (X_b\,\xi^{a}_{c})_{,\nu}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu a}. \end{aligned}$$

Donc, on voit que $(X_b X_c)\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ est égale à la dérivée de Lie de $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ par rapport au vecteur contrevariant $(X_b\,\xi^{\lambda}_{c})$.

Si les vecteurs ξ^{λ}_{a} engendrent un groupe G_r à r paramètres, on a $X_b\,\xi^{\lambda}_{c} = c_{bc}^{\cdot\cdot a}\,\xi^{\lambda}_{c}$, donc, on trouvera, des équations (1.25),

$$(1.26)\qquad (X_b X_c)\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = c_{bc}^{\cdot\cdot a}\,X_a\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}.$$

Or nous avons défini la dérivée de Lie $D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ de la connexion affine $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ par $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\bar{x}) - \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}(\bar{x})$, donc, si l'on écrit x^{λ} au lieu de $\bar{x}^{\lambda}$, on en obtient

$$(1.27)\qquad \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) + D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}.$$

Nous appellerons l'espace déformé à connexion affine celui dont la connexion affne est donnée par $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) + D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Nous allons calculer les composantes du tenseur de torsion $\bar{S}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ et du tenseur de courbure $\bar{R}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ de l'espace déformé.

On a de (1.27)

$$(1.28)\qquad \bar{S}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} + DS^{\lambda}_{\cdot\mu\nu},$$

où

$$(1.29)\qquad DS^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = D(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) = D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - D\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}.$$

En substituant (1.24), ou

$$D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = (\xi^{\lambda}_{;\mu;\nu} + S^{\lambda}_{\cdot\mu\omega;\nu}\xi^{\omega} + S^{\lambda}_{\cdot\mu\omega}\xi^{\omega}_{;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^{\omega})\,\delta t$$

dans (1.29), on trouve

$$(1.30)\qquad DS^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = (\xi^{a} S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu;a} - \xi^{\lambda}_{;a} S^{a}_{\cdot\mu\nu} + \xi^{a}_{;\mu} S^{\lambda}_{\cdot a\nu} + \xi^{a}_{;\nu} S^{\lambda}_{\cdot\mu a})\,\delta t$$

grâce aux premières identités de Bianchi:

$$R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\alpha} + R^{\lambda}_{\cdot\nu\alpha\mu} + R^{\lambda}_{\cdot\alpha\mu\nu}$$
$$= S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu;\alpha} + S^{\lambda}_{\cdot\nu\alpha;\mu} + S^{\lambda}_{\cdot\alpha\mu;\nu} + S^{\lambda}_{\cdot\mu\omega} S^{\omega}_{\cdot\nu\alpha} + S^{\lambda}_{\cdot\nu\omega} S^{\omega}_{\cdot\alpha\mu} + S^{\lambda}_{\cdot\alpha\omega} S^{\omega}_{\cdot\mu\nu}.$$

La formule (1.30) montre que $DS^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ coïncide bien avec celui qui a été défini en haut pour un tenseur quelconque. Cela étant, calculons les composantes

$$\bar{R}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu,\omega} - \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\omega,\nu} + \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\omega} - \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\omega} \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\nu}$$

du tenseur de courbure de l'espace deformé. En substituant (1.27) dans cette équation, on obtient

$$\bar{R}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} + (D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\omega} - (D\Gamma^{\lambda}_{\mu\omega})_{;\nu} + (D\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}) S^{\alpha}_{\cdot\nu\omega}. \tag{1.31}$$

En substituant cette fois l'expression de $D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ dans (1.31), on trouve

$$\bar{R}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} + DR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega},$$

où

$$\begin{aligned} (1.32)\quad & DR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} \\ & = R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\alpha} \xi^{\alpha} - \xi^{\lambda}_{\cdot\alpha} R^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\omega} + \xi^{\alpha}_{\cdot\mu} R^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu\omega} + \xi^{\alpha}_{\cdot\nu} R^{\lambda}_{\cdot\mu\alpha\omega} + \xi^{\alpha}_{\cdot\omega} R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\alpha}, \end{aligned}$$

grâce aux secondes identités de Bianchi:

$$\begin{aligned} & R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\alpha} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\omega\alpha;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\alpha\nu;\omega} \\ & \qquad + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\sigma} S^{\sigma}_{\cdot\omega\alpha} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\omega\sigma} S^{\sigma}_{\cdot\alpha\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\alpha\sigma} S^{\sigma}_{\cdot\nu\omega} = 0. \end{aligned}$$

La formule (1.32) nous montre que $DR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ obtenu ici coïncide bien avec celui qui sera obtenu de $R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ en l'appliquant l'opérateur D défini en haut.