33. Quelques remarques sur les groupes de transformations dans les espaces à connexion lineaires IV.[1]

Par Kentaro YANO et Yasuro TOMONAGA.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., June 12, 1946.)

§ 4. *Transformations conformes dans les espaces de Riemann.*

Dans un espace de Riemann V_n dont la forme quadratique différentielle fondamentale est donnée par

(4.1) $$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu ,$$

considérons une transformation infinitésimale

(4.2) $$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda (x)\, \delta t$$

qui déplace chaque point (x^λ) de V_n en un autre point $(\bar{x}^\lambda)$ du même espace infiniment voisin de (x^λ), δt étant une constante infinitésimale.

On sait que le tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, les symboles de Chritoffel $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ et le tenseur de courbure $R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ subissent, pendant cette transformation infinitésimale, les changements respectivement donnés par

(4.3) $$Dg_{\mu\nu} = (Xg_{\mu\nu})\,\delta t = (\xi^a g_{\mu\nu;a} + \xi^a_{;\mu} g_{a\nu} + \xi^a_{;\nu} g_{\mu a})\,\delta t = (\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu})\,\delta t,$$

(4.4) $$D\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} = (X\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})\,\delta t = \frac{1}{2} g^{\lambda a}[(Xg_{a\mu})_{;\nu} + (Xg_{a\nu})_{;\mu} - (Xg_{\mu\nu})_{;a}]\,\delta t$$
$$= (\xi^{\lambda}_{;\mu;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\,\xi^\omega)\,\delta t,$$

(4.5) $$DR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = (XR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega})\,\delta t = [(X\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})_{;\omega} - (X\{{}^{\lambda}_{\mu\omega}\})_{;\nu}]\,\delta t$$
$$= [\xi^a R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;a} - \xi^{\lambda}_{;a} R^{a}_{\cdot\mu\nu\omega} + \xi^a_{;\mu} R^{\lambda}_{\cdot a\nu\omega} + \xi^a_{;\nu} R^{\lambda}_{\cdot\mu a\omega} + \xi^a_{;\omega} R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu a}]\,\delta t,$$

où ξ_μ désigne les composantes covariantes du vecteur ξ^λ et le point-virgule la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$.

En général, la dérivée de Lie d'une densité, $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ par exemple, du poids p sera définie par

(4.6) $$DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = (XT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu})\,\delta t$$
$$= [\xi^a T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu,a} - \xi^{\lambda}_{,a} T^{a}_{\cdot\mu\nu} + \xi^a_{,\mu} T^{\lambda}_{\cdot a\nu} + \xi^a_{,\nu} T^{\lambda}_{\cdot\mu a} + pT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}\,\xi^a_{,a}]\,\delta t,$$

ou la virgule désigne la dérivée partielle ordinaire. Il est à remarquer que la dérivée de Lie (4.6) est indépendante de la métrique de l'espace et par suite de la connexion affine de l'espace, mais on peut aussi écrire (4.6) sous une forme tensorielle:

(4.7) $$DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = (XT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu})\,\delta t$$

(1) Les Notes I, II, et III ont été publiées dans ces Proc., *20* (1946), 41-47; 67-72; 167-172.

$$= [\xi^a T^\lambda_{\cdot\mu\nu;a} - \xi^\lambda_{;a} T^a_{\cdot\mu\nu} + \xi^a_{;\mu} T^\lambda_{\cdot a\nu} + \xi^a_{;\nu} T^\lambda_{\cdot\mu a} + pT^\lambda_{\cdot\mu\nu} \xi^a_{;a}]\delta t.$$

Or, l'angle entre deux directions dx^λ et δx^λ étant donné par

$$\cos\theta = \frac{g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, \delta x^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu}\,\sqrt{g_{\mu\nu}\, \delta x^\mu\, \delta x^\nu}},$$

si la transformation infinitésimale (4. 2) ne change pas l'angle entre deux directions, on dit qu'elle définit une transformation infinitésimale conforme de l'espace. Comme l'on a

$$Ddx^\lambda = 0,$$

si la transformation infinitésimale (4.2) ne change pas $\cos\theta$, on doit avoir

$$(Dg_{\mu\nu})\, dx^\mu\, \delta x^\nu = 2\phi\, g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, \delta x^\nu$$

pour n'importe quelles directions dx^λ et δx^λ. Donc, nous avons le

Théorème 1: Pour qu'un espace de Riemann admette une transformation infinitésimale conforme (4.2), il faut et il suffit qu'on ait

(4.8) $$Dg_{\mu\nu} = 2\phi\, g_{\mu\nu}\, \delta t \quad \text{ou} \quad Xg_{\mu\nu} \equiv \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\nu;\mu} = 2\phi g_{\mu\nu}.$$

La dérivée de Lie de la densité g (qui est le déterminant formé avec les $g_{\mu\nu}$) du poids 2 étant, d'après la formule (4.7), donnée par

$$Dg = (\xi^a\, g_{;a} + 2g\,\xi^a_{;a})\,\delta t,$$

nous avons

(4.9) $$Dg = 2n\,\phi g\,\delta t \quad \text{ou} \quad Xg = 2n\phi\, g,$$

grâce aux relations

$$g_{;a} = \frac{\partial g}{\partial x^a} - 2g\,\{^{\lambda}_{\lambda a}\} = 0$$

et

$$\xi^a_{;a} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\,(\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}) = n\phi.$$

Cela étant, introduisons la densité tensorielle $G_{\mu\nu}$ de M. T. Y. Thomas[1] définie par

(4.10) $$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}/g^{\frac{1}{n}}.$$

En appliquant l'opérateur D à (4.10) et en tenant compte de (4.8) et de (4.9), on trouve

$$\begin{aligned} X\,G_{\mu\nu} &= (Xg_{\mu\nu})\,/\,g^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\, g_{\mu\nu}\,(Xg)\,/\,g^{\frac{1}{n}+1} \\ &= 2\phi g_{\mu\nu}\,/\,g^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\, g_{\mu\nu}\,(2n\phi g)\,/\,g^{\frac{1}{n}+1} \\ &= 2\phi G_{\mu\nu} - 2\phi\, G_{\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

Donc, nous avons le

Théorème 2: Pour qu'un espace de Riemann admette une transformation infinitésimale conforme (4.2), il faut et il suffit qu'on ait

(4.11) $$D\,G_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ou} \quad X\,G_{\mu\nu} = 0,$$

---

(1) T. Y. Thomas: Differential invariants of generalized spaces. Cambridge University Press, 1934.

$XG_{\mu\nu}$ étant donné par

$$XG_{\mu\nu} = \xi^a G_{\mu\nu,a} + \xi^a_{,\mu} G_{a\nu} + \xi^a_{,\nu} G_{\mu a} - \frac{2}{n} G_{\mu\nu} \xi^a_{,a}. \tag{4.12}$$

Si l'on désigne par deux-points la dérivée covariante formelle par rapport aux symboles $K^\lambda_{\mu\nu}$ définis par

$$K^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} G^{\lambda a}(G_{a\mu,\nu} + G_{a\nu,\mu} - G_{\mu\nu,a}),$$

on obtient

$$XG_{\mu\nu} = (G_{\mu a}\xi^a)_{:\nu} + (G_{\nu a}\xi^a)_{:\mu} - \frac{2}{n} G_{\mu\nu}\xi^a_{:a}.^{(1)} \tag{4.13}$$

Or, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 3: Pour qu' une transformation infinitésimale (4.2) change chaque cercle conforme de l'espace de Riemann en un autre cercle conforme, il faut et il suffit que la transformation infinitésimale (4.2) soit conforme.

Un cercle conforme d'un espace de Riemann est défini par les équations différentielles

$$\frac{\delta^3 x^\lambda}{ds^3} + \frac{dx^\lambda}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\frac{\delta^2 x^\nu}{ds^2} - \Pi^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right) + \Pi^\lambda_{\infty\nu}\frac{dx^\nu}{ds} = 0, \tag{4.14}$$

où δ/ds désigne la dérivée covariante le long de la courbe par rapport aux symboles de Christoffel $\{^{\lambda}_{\mu\nu}\}$, $\Pi^0_{\mu\nu}$ et $\Pi^\lambda_{\infty\nu}$ les tenseurs

$$\Pi^0_{\mu\nu} = -\frac{R_{\mu\nu}}{n-2} + \frac{g_{\mu\nu}R}{2(n-1)(n-2)} \quad \text{et} \quad \Pi^\lambda_{\infty\nu} = g^{\lambda\mu}\Pi^0_{\mu\nu} \tag{4.15}$$

respectivement, $R_{\mu\nu}$ et R étant le tenseur de Ricci et le scalaire de l'espace de Riemann respectivement.

Or, si l'on effectue une transformation infinitésimale (4.2), un cercle conforme sera changé en une autre courbe $\bar{x}^\lambda = x^\lambda(s) + \xi^\lambda(x(s))\delta t$.

Nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe décrite par $\bar{x}^\lambda$ soit aussi un cercle conforme, c'est-à-dire la condition pour qu'on ait toujours

$$\frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^3} + \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}}\left(g_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{\delta^2\bar{x}^\mu}{d\bar{s}^2}\frac{\delta^2\bar{x}^\nu}{d\bar{s}^2} - \Pi^0_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^\mu}{d\bar{s}}\frac{d\bar{x}^\nu}{d\bar{s}}\right) + \Pi^\lambda_{\infty\nu}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^\nu}{d\bar{s}} = 0, \tag{4.16}$$

toutes fois qu'on ait (4.14), $\bar{s}$ étant défini par

$$d\bar{s}^2 = g_{\mu\nu}(\bar{x})\,d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu. \tag{4.17}$$

Cela étant, en calculant $\dfrac{d\bar{x}^\lambda}{ds}$,

$$\frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{ds^2} = \frac{d^2\bar{x}^\lambda}{ds^2} + \{^{\lambda}_{\mu\nu}\}_{\bar{x}}\frac{d\bar{x}^\mu}{ds}\frac{d\bar{x}^\nu}{ds},$$

et

$$\frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{ds^3} = \frac{d}{ds}\frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{ds^2} + \{^{\lambda}_{\mu\nu}\}_{\bar{x}}\frac{\delta^2\bar{x}^\mu}{ds^2}\frac{d\bar{x}^\nu}{ds},$$

(1) S. Sasaki: Geometry of the conformal connexion. Science Reports of the Tôhoku Imperial University, Series 1, Vol. XXIX, No. 2, (1940), p. 219-267.

on trouve successivement

$$(4.18)\qquad \frac{d\bar{x}^\lambda}{ds} = (\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\frac{dx^\alpha}{ds},$$

$$(4.19)\qquad \frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{ds^2} = (\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\frac{\delta^2 x^\alpha}{ds^2} + (X\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t,$$

$$(4.20)\qquad \frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{ds^3} = (\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\frac{\delta^3 x^\alpha}{ds^3} + \Big[3(X\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds} + (\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}\Big]\delta t,$$

$\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}_{\bar{x}}$ désignant les valeurs de $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ évaluées au point $\bar{x}^\lambda$.

Des équations (4.18) et (4.19), nous avons

$$(4.21)\qquad g_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{\delta^2\bar{x}^\mu}{ds^2}\frac{d\bar{x}^\nu}{ds} = g_{\mu\nu}(x)\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds} + \Big[(Xg_{\mu\nu})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\nu}(X\{{}^{\mu}_{\alpha\beta}\})\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\Big]\delta t,$$

et

$$(4.22)\qquad g_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{\delta^2\bar{x}^\mu}{ds^2}\frac{\delta^2\bar{x}^\nu}{ds^2} = g_{\mu\nu}(x)\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\frac{\delta^2 x^\nu}{ds^2} + \Big[(Xg_{\mu\nu})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{\delta^2x^\nu}{ds^2} + 2g_{\mu\nu}\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}(X\{{}^{\nu}_{\alpha\beta}\})\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\Big]\delta t.$$

D'autre part, on a, de (4.17),

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = g_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^\mu}{ds}\frac{d\bar{x}^\nu}{ds},$$

d'où

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = 1 + (Xg_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t,$$

et par conséquent

$$(4.23)\qquad \frac{d\bar{s}}{ds} = 1 + \frac{1}{2}(Xg_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t.$$

De cette relation, on dérive

$$(4.24)\qquad \frac{d^2\bar{s}}{ds^2} = \Big[\frac{1}{2}(Xg_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds} + (Xg_{\mu\nu})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}\Big]\delta t$$

et

$$(4.25)\qquad \frac{d^3\bar{s}}{ds^3} = \frac{d}{ds}\Big[\frac{1}{2}(Xg_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds} + (Xg_{\mu\nu})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}\Big]\delta t.$$

Or, $\frac{d\bar{x}^\lambda}{ds}$, $\frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{ds^2}$ et $\frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{ds^3}$ étant respectivement donnés par

$$\frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}} = \frac{\dfrac{d\bar{x}^\lambda}{ds}}{\dfrac{d\bar{s}}{ds}},$$

$$\frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^2} = \frac{\dfrac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2} - \frac{\dfrac{d\bar{x}^\lambda}{ds}\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3},$$

$$\frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^3} = \frac{\dfrac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{ds^3}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3} - \frac{3\dfrac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{ds^2}\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^4} - \frac{\dfrac{d\bar{x}^\lambda}{ds}\dfrac{d^3\bar{s}}{ds^3}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^4} + \frac{3\dfrac{d\bar{x}^\lambda}{ds}\left(\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}\right)^2}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^5},$$

le premier membre de (4.16) peut être écrit comme

$$\frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^3} + \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}}\left[g_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{\delta^2\bar{x}^\mu}{d\bar{s}^2}\frac{\delta^2\bar{x}^\nu}{d\bar{s}^2} - \Pi^0_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^\mu}{d\bar{s}}\frac{d\bar{x}^\nu}{d\bar{s}}\right] + \Pi^\lambda_{\infty\nu}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^\nu}{d\bar{s}}$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}\left[\frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{ds^3} + \frac{\dfrac{d\bar{x}^\lambda}{ds}g_{\mu\nu}(\bar{x})\dfrac{\delta^2\bar{x}^\mu}{ds^2}\dfrac{\delta^2\bar{x}^\nu}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2} - \frac{d\bar{x}^\lambda}{ds}\Pi^0_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^\mu}{ds}\frac{d\bar{x}^\nu}{ds}\right]$$

$$+ \frac{\Pi^\lambda_{\infty\nu}(\bar{x})\dfrac{d\bar{x}^\nu}{ds}}{\dfrac{d\bar{s}}{ds}} - \frac{3\dfrac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{ds^2}\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^4} - \frac{d\bar{x}^\lambda}{ds}\left[\frac{\dfrac{d^3\bar{s}}{ds^3}\dfrac{d\bar{s}}{ds} - 3\left(\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}\right)^2}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^5}\right.$$

$$\left. + \frac{g_{\mu\nu}(\bar{x})\dfrac{\delta^2\bar{x}^\mu}{ds^2}\dfrac{d\bar{x}^\nu}{ds}\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^6} - \frac{g_{\mu\nu}(\bar{x})\dfrac{d\bar{x}^\mu}{ds}\dfrac{d\bar{x}^\nu}{ds}\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}\left(\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}\right)^2}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^7}\right]$$

En y portant (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23), (4.24) et (4.25), on trouve

$$\frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^3} + \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}}\left[g_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{\delta^2\bar{x}^\mu}{d\bar{s}^2}\frac{\delta^2\bar{x}^\nu}{d\bar{s}^2} - \Pi^0_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^\mu}{d\bar{s}}\frac{d\bar{x}^\nu}{d\bar{s}}\right] + \Pi^\lambda_{\infty\nu}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^\nu}{d\bar{s}}$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}\left[(\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\left\{\frac{\delta^3x^\lambda}{ds^3} + \frac{dx^\lambda}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{\delta^2x^\nu}{ds^2} - \Pi^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)\right.\right.$$

$$\left. + \Pi^\lambda_{\infty\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\right\} + \left\{\left(X\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}\right)_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds} + 3\left(X\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}\right)\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds} + (X\Pi^\lambda_{\infty\nu})\frac{dx^\nu}{ds}\right.$$

$$\left. + (Xg_{\alpha\beta})\,\Pi^\lambda_{\infty\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right\}\delta t$$

$$- 3\frac{\delta^2x^\lambda}{ds^2}\left\{\frac{1}{2}(Xg_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds} + (Xg_{\mu\nu})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}\right\}\delta t$$

$$+ \frac{dx^\lambda}{ds}\left\{2g_{\mu\nu}\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\left(X\left\{{\nu \atop \alpha\beta}\right\}\right)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} + (Xg_{\mu\nu})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{\delta^2x^\nu}{ds^2}\right.$$

$$\left. - (Xg_{\alpha\beta})\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}g_{\mu\nu}\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{\delta^2x^\nu}{ds^2}\right\}\delta t$$

$$- \frac{dx^\lambda}{ds}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{2}(Xg_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds} + (Xg_{\mu\nu})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{\delta^2x^\nu}{ds^2}\right\}\delta t$$

$$- \frac{dx^\lambda}{ds}\left\{(Xg_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds} + 2(Xg_{\mu\nu})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}\right\}g_{\alpha\beta}\frac{\delta^2x^\alpha}{ds^2}\frac{\delta^2x^\beta}{ds^2}\delta t$$

$$\left. - \frac{dx^\lambda}{ds}(X\Pi^0_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t\right].$$

Pour qu'un cercle conforme soit toujours transformé en un autre cercle conforme, on doit avoir

$$\Big\{(X\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}+3(X\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}+(X\Pi^{\lambda}_{\infty\nu})\frac{dx^\nu}{ds}$$
$$+(Xg_{\alpha\beta})\,\Pi^{\lambda}_{\infty\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\Big\}-3\frac{\delta^2x^\lambda}{ds^2}\Big\{\frac{1}{2}(Xg_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}$$
$$+(Xg_{\mu\nu})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}\Big\}+\frac{dx^\lambda}{ds}\{\ldots\ldots\}=0,$$

d'où, en contractant $g_{\lambda\alpha}\dfrac{\delta^2x^\alpha}{ds^2}$, on obtient

$$g_{\lambda\alpha}(X\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})_{;\omega}\frac{\delta^2x^\alpha}{ds^2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}+3g_{\lambda\alpha}(X\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})\frac{\delta^2x^\alpha}{ds^2}\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}$$
$$+g_{\lambda\alpha}(X\Pi^{\lambda}_{\infty\nu})\frac{\delta^2x^\alpha}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}+(Xg_{\alpha\beta})\,\Pi^{0}_{\mu\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}$$
$$-3g_{\lambda\alpha}\frac{\delta^2x^\lambda}{ds^2}\frac{\delta^2x^\alpha}{ds^2}\Big\{\frac{1}{2}(Xg_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}+(Xg_{\mu\nu})\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}\Big\}=0.$$

Cette éouation devant être satisfaite par n'importe quels $\dfrac{dx^\lambda}{ds}$ et $\dfrac{\delta^2x^\lambda}{ds^2}$ satisfaisant aux $g_{\mu\nu}\dfrac{\delta^2x^\mu}{ds^2}\dfrac{dx^\nu}{ds}=0$, on en trovve

$$Xg_{\alpha\beta}=2\phi\,g_{\alpha\beta}.$$

Donc, la transformation infinitésimale doit être conforme. Inversement si la transformation infinitésimale est cōnforme, il est évident qu'un cercle-conforme est transformé en un autre cercle conforme, donc, le théorème en question est démontré.

Cela étant, si l'on choisit un système de coordonnées dans lequel on a $\xi^\lambda=\delta^\lambda_1$, les équations (4.8) deviennent

$$\underset{\prime}{X}g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu,1}=2\phi\,g_{\mu\nu},$$

d'où

(4.26) $$g_{\mu\nu}=\alpha(x^1,x^2,\ldots,x^n)f_{\mu\nu}(x^2,x^3,\ldots,x^n).$$

Donc, nous avons le

Théorème 4 : Pour qu'un espace de Riemann admette une transformation infinitésimale conforme, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées dans lequel les composantes du tenseur fondamental sont indépendantes d'une des variables x^λ à un facteur près.

Si l'on choisit un tel système de coordonnées, les équations (4.11) deviennent

(4.27) $$XG_{\mu\nu}=G_{\mu\nu,1}=0.$$

Donc, nous avons le

Théorème 5 : Pour qu'un espace de Riemann admette une transformation infinitésimale conforme, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées dans lequel les composantes de la densité fondamentale sont indépendantes d'une des variables x^λ [1].

---

(1) S. Sasaki, loc. cit., p. 232.

Si un espace de Riemann admet une transformation infinitésimale conforme (4.2), et si l'on choisit un système de coordonnées tel qu'on ait $\xi^\lambda = \delta^\lambda_1$, alors, les rapports des $g_{\mu\nu}$ ou les fonctions $G_{\mu\nu}$ ne se changent pas par la transformation finie donnée par

(4.28) $$\bar{x}^1 = x^1 + t, \qquad \bar{x}^a = x^a \quad (a = 2, 3, \ldots, n).$$

Donc, nous avons les

Théorème 6 : Si un espace de Riemann admet une transformation infinitésimale conforme, il admet aussi un groupe de transformations conformes à un paramètre engendré par cette transformation infinitésimale conforme.(1)

Théorème 7 : Pour qu'un espace de Riemann admette un groupe de transformations conformes à un paramètre, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées dans lequel les composantes du tenseur fondamental sont indépendantes d'une des variable x^λ à un facteur près, ou les composantes de la densité fondamentale sont indépendantes d'une des variables x^λ.

Cela étant, considérons, dans un espace de Riemann, r transformations infinitésimales conformes

(4.29) $$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda_a \delta t \qquad (a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, r)$$

indépendantes les unes des autres. Alors on aura

(4.30) $$(X_b X_c) g_{\mu\nu} = X_{bc} g_{\mu\nu},$$

où

$$X_a g_{\mu\nu} = 2\phi_a g_{\mu\nu}$$

et X_{bc} désigne le symbole défini par le vecteur

$$\xi^\lambda_{bc} = \xi^a_b \xi^\lambda_{c,\,a} - \xi^a_c \xi^\lambda_{b,\,a}.$$

En calculant $(X_b X_c) g_{\mu\nu}$, on trouve

$$\begin{aligned}(X_b X_c) g_{\mu\nu} &= X_b X_c g_{\mu\nu} - X_c X_b g_{\mu\nu} \\ &= X_b (2\phi_c g_{\mu\nu}) - X_c (2\phi_b g_{\mu\nu}) \\ &= 2(X_b \phi_c) g_{\mu\nu} + 2\phi_c X_b g_{\mu\nu} - 2(X_c \phi_b) g_{\mu\nu} - 2\phi_b X_c g_{\mu\nu} \\ &= 2(X_b \phi_c) g_{\mu\nu} + 4\phi_c \phi_b g_{\mu\nu} - 2(X_c \phi_b) g_{\mu\nu} - 4\phi_b \phi_c g_{\mu\nu} \\ &= 2[X_b \phi_c - X_c \phi_b] g_{\mu\nu},\end{aligned}$$

d'où

$$X_{bc} g_{\mu\nu} = 2[X_b \phi_c - X_c \phi_b] g_{\mu\nu}.$$

Donc, les transformations infinitésimales définies par $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda_{bc} \delta t$ sont aussi les transformations infinitésimales conformes.

Ce résultat peut être aussi obtenu de la manière suivante.

En appliquant l'opérateur $(X_b X_c)$ à la densité fondamentale $G_{\mu\nu}$, on trouve

(4.31) $$(X_b X_c) G_{\mu\nu} = X_{bc} G_{\mu\nu}.$$

(1) S. Sasaki, loc. cit., p. 232.

(2) Voir la première Note.

Donc, si l'on a $X_a G_{\mu\nu} = 0$, on en obtient $X_{bc} G_{\mu\nu} = 0$, et on a le

Théorème 8: Si $X_a f$ sont les symboles de groupes de transformations conformes à un paramètre, $(X_b X_c)f$ sont aussi les symboles des groupes de transformations conformes à un paramètre.

Si $X_a f$ sont les symboles d'un ensemble complet de r groupes de transformations conformes à un paramètre, on a

$$\xi^\lambda_{bc} = \xi^a_b \xi^\lambda_{c,\,a} - \xi^a_c \xi^\lambda_{b,\,a} = c^{\cdot\cdot a}_{bc} \xi^\lambda_a,$$

et par consequent, on trouve, de (4.30),

$$(X_b X_c) g_{\mu\nu} = c^{\cdot\cdot a}_{bc} X_a g_{\mu\nu}, \tag{4.32}$$

et, de (4.31),

$$(X_b X_c) G_{\mu\nu} = c^{\cdot\cdot a}_{bc} X_a G_{\mu\nu}. \tag{4.33}$$

Donc, on a le

Théorème 9: Si $X_a f$ sont les symboles d'un ensemble complet de r groupes de transformations conformes à un paramètre, les $X_a f$ sont les symboles d'un groupe de transformations conformes à r paramètres.

Cela étant, nous allons considérer la condition pour que l'espace admette une transformation infinitésimale conforme $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda \delta t$.

D'abord, on doit avoir

$$X g_{\mu\nu} \equiv \xi_{\mu;\,\nu} + \xi_{\nu;\,\mu} = 2\phi g_{\mu\nu}.$$

Des équations (4.4), on obtient

$$X \left\{ {}^{\lambda}_{\mu\nu} \right\} = \delta^\lambda_\mu \phi_\nu + \delta^\lambda_\nu \phi_\mu - \phi^\lambda g_{\mu\nu}, \tag{4.34}$$

où nous avons posé $\phi_\nu = \partial \phi / \partial x^\nu$ et $\phi^\lambda = g^{\lambda a} \phi_a$.

En portant (4.34) dans (4.5), on trouve

$$XR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = -(\phi_{\mu;\,\nu} \delta^\lambda_\omega - \phi_{\mu;\,\omega} \delta^\lambda_\nu + g_{\mu\nu} \phi^{\lambda}_{;\,\omega} - g_{\mu\omega} \phi^{\lambda}_{;\,\nu}). \tag{4.35}$$

En contractant ici par rapport aux indices λ et ω, on trouve

$$XR_{\mu\nu} = -(n-2)\phi_{\mu;\,\nu} - g_{\mu\nu} \phi^{a}_{;\,a}, \tag{4.36}$$

où $R_{\mu\nu} (= R^{a}_{\cdot\mu\nu a})$ désigne le tenseur de Ricci.

Cela étant, en contractant $g^{\mu\nu}$ à (4.36), on obtient

$$g^{\mu\nu} XR_{\mu\nu} = -2(n-1)\phi^{a}_{;\,a}. \tag{4.37}$$

Mais, on a, d'autre part,

$$g^{\mu\nu} XR_{\mu\nu} = X(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) - (X g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu}$$

et

$$X g^{\mu\nu} = -2\phi g^{\mu\nu}.$$

Donc, on a, de (4.37),

$$XR + 2\phi R = -2(n-1)\phi^{a}_{;\,a}.$$

où R désigne le scalaire de courbure de l'espace. En portant

$$-\phi^{a}_{;\,a} = \frac{1}{2(n-1)}(XR + 2\phi R)$$

dans (4.36), on obtient

$$XR_{\mu\nu} = -(n-2)\phi_{\mu;\nu} + \frac{g_{\mu\nu}XR + 2\phi g_{\mu\nu}R}{2(n-1)}$$
$$= -(n-2)\phi_{\mu;\nu} + \frac{X(g_{\mu\nu}R)}{2(n-1)},$$

d'où

(4.38) $$X\Pi^0_{\mu\nu} = \phi_{\mu;\nu},$$

où nous avons posé

(4.39) $$\Pi^0_{\mu\nu} = -\frac{R_{\mu\nu}}{n-2} + \frac{g_{\mu\nu}R}{2(n-1)(n-2)}.$$

En substituant (4.38) dans (4.35) et en remarquant que

$$g_{\mu\nu}\phi^{\lambda}_{;\omega} = g_{\mu\nu}g^{\lambda a}(X\Pi^0_{a\omega})$$
$$= g_{\mu\nu}X(g^{\lambda a}\Pi^0_{a\omega}) - g_{\mu\nu}(Xg^{\lambda a})\Pi^0_{a\omega}$$
$$= g_{\mu\nu}X(g^{\lambda a}\Pi^0_{a\omega}) + 2\phi g_{\mu\nu}g^{\lambda a}\Pi^0_{a\omega}$$
$$= g_{\mu\nu}X(g^{\lambda a}\Pi^0_{a\omega}) + (Xg_{\mu\nu})g^{\lambda a}\Pi^0_{a\omega}$$
$$= X(g_{\mu\nu}g^{\lambda a}\Pi^0_{a\omega}),$$

on obtient

(4.40) $$XC^{\lambda}_{.\mu\nu\omega} = 0,$$

$C^{\lambda}_{\mu\nu\omega}$ désignant le tenseur conforme de courbure de M. H. Weyl:

(4.41) $$C^{\lambda}_{.\mu\nu\omega} = R^{\lambda}_{.\mu\nu\omega} + \Pi^0_{\mu\nu}\delta^{\lambda}_{\omega} - \Pi^0_{\mu\omega}\delta^{\lambda}_{\nu} + g_{\mu\nu}\Pi^{\lambda}_{\infty\omega} - g_{\mu\omega}\Pi^{\lambda}_{\infty\nu},$$

où

$$\Pi^{\lambda}_{\infty\omega} = g^{\lambda\nu}\Pi^0_{\nu\omega}.$$

Pour trouver la condition d'intégrabilité de (4.38), portons (4.38) dans l'identité

$$\phi_{\mu;\nu;\omega} - \phi_{\mu;\omega;\nu} = -\phi_{\lambda}R^{\lambda}_{.\mu\nu\omega},$$

alors on trouvera

(4.42) $$(X\Pi^0_{\mu\nu})_{;\omega} - (X\Pi^0_{\mu\omega})_{;\nu} = -\phi_{\lambda}R^{\lambda}_{.\mu\nu\omega}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$X(\Pi^0_{\mu\nu;\omega}) - (X\Pi^0_{\mu\nu})_{;\omega} = -\Pi^0_{a\nu}X\{{}^{a}_{\mu\omega}\} - \Pi^0_{\mu a}X\{{}^{a}_{\nu\omega}\},$$

d'où

$$X(\Pi^0_{\mu\nu;\omega} - \Pi^0_{\mu\omega;\nu}) - [(X\Pi^0_{\mu\nu})_{;\omega} - (X\Pi^0_{\mu\omega})_{;\nu}]$$
$$= -\Pi^0_{a\nu}X\{{}^{a}_{\mu\omega}\} + \Pi^0_{a\omega}X\{{}^{a}_{\mu\nu}\}$$
$$= -\phi_{\lambda}(\Pi^0_{\mu\nu}\delta^{\lambda}_{\omega} - \Pi^0_{\mu\omega}\delta^{\lambda}_{\nu} + g_{\mu\nu}\Pi^{\lambda}_{\infty\omega} - g_{\mu\omega}\Pi^{\lambda}_{\infty\nu}).$$

Donc, les équations (4.38) nous donnent

(4.43) $$XC^0_{\cdot\mu\nu\omega} = -\phi_{\lambda}C^{\lambda}_{.\mu\nu\omega},$$

ou nous avons posé

(4.44) $$C^0_{.\mu\nu\omega} = \Pi^0_{\mu\nu;\omega} - \Pi^0_{\mu\omega;\nu}.$$

Pour trouver encore les conditions d'intégrabilité, portons (4.43) dans l'identité

$$X(C^{\lambda}_{.\mu\nu\omega;\sigma}) - X(C^{\lambda}_{.\mu\nu\omega})_{;\sigma}$$

$$= C^{a}_{\cdot\mu\nu\omega} X\left\{{\lambda \atop a\sigma}\right\} - C^{\lambda}_{\cdot a\nu\omega} X\left\{{a \atop \mu\sigma}\right\} - C^{\lambda}_{\cdot\mu a\omega} X\left\{{a \atop \nu\sigma}\right\} - C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu a} X\left\{{a \atop \omega\sigma}\right\},$$

alors on obtiendra

$$X(C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\,\sigma}) = -2\, C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\, \phi_\sigma + \ldots\ldots \tag{4.45}$$

ou le second member ne contient que ϕ_λ, et $C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$.

Portons ensuite (4.43) et (4.34) dans l'identité

$$X(C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega;\,\sigma}) - (X\, C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega;\,\sigma})$$
$$= -C^{0}_{\cdot a\nu\omega} X\left\{{a \atop \mu\sigma}\right\} - C^{0}_{\cdot\mu a\omega} X\left\{{a \atop \nu\sigma}\right\} - C^{0}_{\cdot\mu\nu a} X\left\{{a \atop \omega\sigma}\right\},$$

alors on obtiendra

$$\mathrm{X}(C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega;\,\sigma}) = -\phi_{\lambda;\,\sigma} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - \phi_\lambda\, C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\,\sigma} - 3\, C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega}\, \phi_\sigma + \ldots\ldots,$$

d'où

$$\mathrm{X}(C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega;\,\sigma}) = -(\mathrm{X}\Pi^{0}_{\lambda\sigma})\, C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - \phi_\lambda\, C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\,\sigma} - 3\, C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega}\, \phi_\sigma + \ldots\ldots \tag{4.46}$$

ou les termes indiqués par les points de suspension ne contiennent que ϕ_λ, $g_{\mu\nu}$ et $C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega}$.

Nous pouvons continuer ainsi de suite.

Cela étant, pour que l'espace admette une transformation infinitésimale conforme, il faut et il suffit que le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} (\mathrm{i}) & \xi^{\lambda}_{;\,\mu} = \xi^{\lambda}_{\cdot\mu}, \\ (\mathrm{ii}) & \xi^{\lambda}_{\cdot\mu;\,\nu} = -R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^{\omega} + \delta^{\lambda}_{\mu}\phi_\nu + \delta^{\lambda}_{\nu}\phi_\mu - g^{\lambda a}\phi_a g_{\mu\nu}, \\ (\mathrm{iii}) & \phi_{;\,\lambda} = \phi_\lambda, \\ (\mathrm{iv}) & \phi_{\mu;\,\nu} = \xi^{a}\Pi^{0}_{\mu\nu;\,a} + \xi^{a}_{\cdot\mu}\Pi^{0}_{a\nu} + \xi^{a}_{\cdot\nu}\Pi^{0}_{\mu a}, \end{cases} \tag{4.47}$$

avec les conditions

$$\xi_{\mu\nu} + \xi_{\nu\mu} = 2\phi g_{\mu\nu}, \qquad (\xi_{\mu\nu} = g_{\mu a}\xi^{a}_{\cdot\nu}) \tag{4.48}$$

admette les solutions ξ^{λ}, $\xi^{\lambda}_{\cdot\nu}$, ϕ et ϕ_λ.

Or, la condition d'intégrabilité de (4.47) (i) calculée à l'aide de (4.48) est (4.47) (ii), et celle de (4.47) (iv) est satisfaite à cause de la symétrie par rapport aux μ et ν des équations (4.47) (iv).

Comme nous avons calculé, on tire, comme les conditions d'intégrabilité de (4.47),

$$\begin{cases} \mathrm{X}\, C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0, \\ \mathrm{X}\, C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega} = -\phi_\lambda\, C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}, \\ \mathrm{X}\, C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\,\sigma} = -2\, C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\phi_\sigma + \ldots\ldots, \\ \mathrm{X}\, C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega;\,\sigma} = -(\mathrm{X}\Pi^{0}_{\lambda\sigma})\, C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - \phi_\lambda\, C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\sigma} - 3\, C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega}\,\phi_\sigma + \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{4.49}$$

Donc, nous avons le

Théorème 10: Pour que l'espace admette une transformation infinitésimale conforme, il faut et il suffit que les équations (4.48) et (4.49) soient algébriquement compatibles par rapport aux ξ^{λ}, $\xi^{\lambda}_{\cdot\mu}$, ϕ *et* ϕ_λ.

Cela étant, nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (4.47) soient complètement intégrables, soit, pour que l'espace admette un groupe de transformations conformes d'ordre maximum.

Pour cela, il faut et il suffit qu'on ait

$$X C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \xi^{\alpha} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\alpha} - \xi^{\lambda}_{;\alpha} C^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\omega} + \xi^{\alpha}_{;\mu} C^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu\omega} + \xi^{\alpha}_{;\nu} C^{\lambda}_{\cdot\mu\alpha\omega} + \xi^{\alpha}_{;\omega} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\alpha} = 0, \tag{4.50}$$

et

$$X C^{0}_{\mu\nu\omega} = \xi^{\alpha} C^{0}_{\mu\nu\omega;\alpha} - \xi^{\alpha}_{;\mu} C^{0}_{\cdot\alpha\nu\omega} - \xi^{\alpha}_{;\nu} C^{0}_{\cdot\mu\alpha\omega} - \xi^{\alpha}_{;\omega} C^{0}_{\cdot\mu\nu\alpha} = -\phi_{\lambda} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} \tag{4.51}$$

identiquement pour n'importe quels ξ^{λ}, $\xi^{\lambda}_{;\mu}$ et ϕ_{λ} satisfaisant aux

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 2\phi g_{\mu\nu}.$$

De l'éuation (4.51), nous obtenons d'abord

$$C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega;\sigma} = 0 \tag{4.52}$$

et

$$C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0. \tag{4.53}$$

Si $n > 3$, de (4.53), on obtient

$$C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0. \tag{4.54}$$

Si $n = 3$, de (4.51), on trouve

$$g^{\alpha\beta}(\delta^{\gamma}_{\mu} C^{0}_{\cdot\alpha\nu\omega} + \delta^{\gamma}_{\nu} C^{0}_{\cdot\mu\alpha\omega} + \delta^{\gamma}_{\omega} C^{0}_{\cdot\mu\nu\alpha})\xi_{\beta\gamma} = 0.$$

Pour que ces équations soient valables pour n'importe quels $\xi_{\beta\gamma}$ satisfaisant aux $\xi_{\beta\gamma} + \xi_{\gamma\beta} = 2\phi g_{\beta\gamma}$, on doit avoir[(1)]

$$\begin{aligned} &g^{\alpha\beta}(\delta^{\gamma}_{\mu} C^{0}_{\cdot\alpha\nu\omega} + \delta^{\gamma}_{\nu} C^{0}_{\cdot\mu\alpha\omega} + \delta^{\gamma}_{\omega} C^{0}_{\cdot\mu\nu\alpha}) \\ &\qquad - g^{\alpha\gamma}(\delta^{\beta}_{\mu} C^{0}_{\cdot\alpha\nu\omega} + \delta^{\beta}_{\nu} C^{0}_{\cdot\mu\alpha\omega} + \delta^{\beta}_{\omega} C^{0}_{\cdot\mu\nu\alpha}) = 0, \\ &g_{\beta\gamma} g^{\alpha\beta}(\delta^{\gamma}_{\mu} C^{0}_{\cdot\alpha\nu\omega} + \delta^{\gamma}_{\nu} C^{0}_{\cdot\mu\alpha\omega} + \delta^{\gamma}_{\omega} C^{0}_{\cdot\mu\nu\alpha}) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$C^{0}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0. \tag{4.55}$$

Donc, nous avons le

Théoreme 11 : Pour qu'un espace de Riemann admette un groupe de transformations conformes d'ordre maximum $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$*, il faut et il suffit que l'espace soit conforme à un espace euclidien.*

---

(1) Pour que l'équation $C^{\beta\gamma}\xi_{\beta\gamma} = 0$ soit valable pour n'importe quel $\xi_{\beta\gamma}$ satisfaisant à $\xi_{\beta\gamma} + \xi_{\gamma\beta} = 2\phi g_{\beta\gamma}$, on doit avoir

$$C^{\beta\gamma}(\xi_{\beta\gamma} + \xi_{\gamma\beta}) + C^{\beta\gamma}(\xi_{\beta\gamma} - \xi_{\gamma\beta}) = 0,$$

d'où

$$2\phi C^{\beta\gamma} g_{\beta\gamma} + C^{\beta\gamma}(\xi_{\beta\gamma} - \xi_{\gamma\beta}) = 0$$

pour n'importe quel $\xi_{\beta\gamma} - \xi_{\gamma\beta}$, d'où

$$C^{\beta\gamma} g_{\beta\gamma} = 0 \quad \text{et} \quad C^{\beta\gamma} = C^{\gamma\beta}.$$