32. Quelques remarques sur les groupes de transformations dans les espaces à connexion linéaire III.[1]

Par Kentaro YANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., June 12, 1946.)

§ 3. *Mouvements et collinéations affines dans les espaces de Riemann.*

Prenons un espace de Riemann V_n dont la forme quadratique différentielle est donnée par

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu, \tag{3.1}$$

et considérons, dans cet espace, une transformation infinitésimale

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda(x)\,\delta t \tag{3.2}$$

qui déplace chaque point (x^λ) de l'espace en un autre point $(\bar{x}^\lambda)$ de l'espace infiniment voisin de (x^λ).

Nous avons vu, dans Chapitre 1, que tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$ subit, pendant cette transformation infinitésimale, un changement donné par

$$D g_{\mu\nu} = [\xi^\alpha g_{\mu\nu;\,\alpha} + \xi^\alpha{}_{;\,\mu}\, g_{\alpha\nu} + \xi^\alpha{}_{;\,\nu}\, g_{\mu\alpha}]\,\delta t,$$

ou

$$D g_{\mu\nu} = [\xi_{\mu;\,\nu} + \xi_{\nu;\,\mu}]\,\delta t, \tag{3.3}$$

où ξ_μ désignent les composantes covariantes du vecteur de déplacement et le point-virgule indique la derivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ formés avec les $g_{\mu\nu}$.

Nous appellerons l'espace déformé $\bar{V}_n$ l'espace de Riemann dont le tenseur fondamental est defini par

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + Dg_{\mu\nu}. \tag{3.4}$$

Si l'on désigne par $\overline{\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}}$ les symboles de Christoffel formés avec les composantes $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ du tenseur déformé, soit, si l'on pose

$$\overline{\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}} = \tfrac{1}{2}\,\bar{g}^{\lambda\alpha}(\bar{g}_{\alpha\mu,\,\nu} + \bar{g}_{\alpha\nu,\,\mu} - \bar{g}_{\mu\nu,\,\alpha}).$$

on en obtient[2]

$$\overline{\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}} = \{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} + \tfrac{1}{2}\, g^{\lambda\alpha}[(Dg_{\alpha\mu})_{;\,\nu} + (Dg_{\alpha\nu})_{;\,\mu} - (Dg_{\mu\nu})_{;\,\alpha}], \tag{3.5}$$

où la virgule désigne la dérivée partielle. Les formules (3.5) peuvent être aussi obtenues de la manière suivante:

---

(1) La première et la deuxième Notes portant le même titre ont été publiées dans ces Proc., *22* (1946), 41-47, 67-72.

(2) K. Yano: Sur la théorie des déformations infinitésimales. Journal of the Faculty, Imperial University of Tokyo. (sous presse), § 2, (4). Ce Mémoire sera, dans la suite, citée par T. D. I.

En ce qui concerne l'opérateur de la dérivée covariante et celui de la déformation infinitésimale, on a, en général,(1)

$$D(T^{\lambda}_{.\mu\nu;\omega}) - (DT^{\lambda}_{.\mu\nu})_{;\omega} = T^{\alpha}_{.\mu\nu}(D\{^{\lambda}_{\alpha\omega}\}) - T^{\lambda}_{.\alpha\nu}(D\{^{\alpha}_{\mu\omega}\}) - T^{\lambda}_{.\mu\alpha}(D\{^{\alpha}_{\nu\omega}\}).$$

En appliquant ces formules au tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, on trouve

$$D(g_{\mu\nu;\omega}) - (Dg_{\mu\nu})_{;\omega} = -g_{\alpha\nu}(D\{^{\alpha}_{\mu\omega}\}) - g_{\mu\alpha}(D\{^{\alpha}_{\nu\omega}\}),$$

d'où, en tenant compte de $g_{\mu\nu;\omega}=0$, on obtient

(3.6) $$(Dg_{\mu\nu})_{;\omega} = g_{\alpha\nu}(D\{^{\alpha}_{\mu\omega}\}) + g_{\mu\alpha}(D\{^{\alpha}_{\nu\omega}\}).$$

En résolvant ces équations par rapport à $D\{^{\lambda}_{\mu\nu}\}$, on trouve

(3.7) $$D\{^{\lambda}_{\mu\nu}\} = \tfrac{1}{2} g^{\lambda\alpha}[(Dg_{\alpha\mu})_{;\nu} + (Dg_{\alpha\nu})_{;\mu} - (Dg_{\mu\nu})_{;\alpha}].$$

Or, si la déformation infinitésimale (3.2) ne change pas le ds^2 de l'espace, on dit qu'elle définit un mouvement infinitésimal.

Comme on a

(3.8) $$Ddx^{\lambda} = 0,$$ (2)

si la déformation infinitésimale (3.2) ne change pas le ds^2, on a

$$D\,ds^2 = (Dg_{\mu\nu})dx^{\mu}\,dx^{\nu} = 0$$

pour n'importe quelle direction dx^{λ}. Donc, nous avons le

Théorème 1: Pour qu'un espace de Riemann admette un mouvement infinitésimal (3.2), il faut et il suffit qu'on ait

(3.9) $$Dg_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ou} \quad Xg_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0.$$

Si l'on choisit un système de coordonnées dans lequel on a $\xi^{\lambda} = \delta^{\lambda}_1$, les équations (3.9) deviennent

$$Xg_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,1} = 0.$$

Donc, les $g_{\mu\nu}$ sont indépendantes de x^1, et on a le

Théorème 2: Pour qu'un espace de Riemann admette un mouvement infinitésimal, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées dans lequel les composantes du tenseur fondamental sont indépendantes d'une des variables x^{λ}

S'il en est ainsi, les composantes $g_{\mu\nu}$ ne change pas par la transformation finie donnée par

$$\bar{x}^1 = x^1 + t, \qquad \bar{x}^a = x^a \quad (a=2, 3, \ldots\ldots, n).$$

Donc, nous avons les

Théorème 3: Si un espace de Riemann admet un mouvement infinitésimal, il admet aussi un groupe de mouvements à un paramètre engendré par ce mouvement infinitésimal.

Théoreme 4: Pour qu'un espace de Riemann admette un groupe de mouvements à un parametre, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées dans lequel les composantes du tenseur fondamental sont indépendantes d'une

(1) T.D.I., §2, (3). (2) T.D.I., §2, (1).

des variables x^λ.

Or, les équations (3.7) nous donnent le

Théorème 5 : Si un espace de Riemann admet un mouvement infinitésimal, il admet une collinéation affine infinitésimale. S'il admet un groupe de mouvements à un paramètre, il admet un groupe de collinéations affines à un paramètre.

Cela étant, considérons, dans un espace de Riemann, r mouvements infinitésimaux

$$x^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda_a \delta t \qquad (a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, r)$$

indépendantes les unes des autres. Alors on aura

$$(3.10) \qquad (X_b X_c)\, g_{\mu\nu} = X_{bc}\, g_{\mu\nu} \text{ [1]},$$

où X_{bc} désigne le symbole défini par le vecteur

$$\xi^\lambda_{bc} = \xi^a_b \xi^\lambda_{c;\,a} - \xi^a_c \xi^\lambda_{b;\,a}.$$

Donc, on a le

Théorème 6 : Si $X_a f$ sont les symboles de r groupes de mouvements à un paramètre, $(X_b X_c)\, f$ sont aussi les symboles des groupes de mouvements à un paramètre.

Si $X_a f$ sont les symboles d'un ensemble complet de r groupes de transformations à un paramètre, on a

$$\xi^\lambda_{bc} = \xi^a_b \xi^\lambda_{c;\,a} - \xi^a_c \xi^\lambda_{b;\,a} = c_{bc}^{\cdot\cdot a} \xi^\lambda_a,$$

et par conséquent, on trouve, de (3.10),

$$(3.11) \qquad (X_b X_c)\, g_{\mu\nu} = c_{bc}^{\cdot\cdot a} X_a\, g_{\mu\nu}.$$

Donc, on a le

Théorème 7 : Si $X_a f$ sont les symboles d'un ensemble complet de r groupes de mouvements à un paramètre, les $X_a f$ sont les symboles d'un groupe de mouvements à r paramètres.

Cela étant, nous allons considérer les conditions d'intégrabilité des équations

$$X g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\,\nu} + \xi_{\nu;\,\mu} = 0.$$

Les équations (3.7) nous donnent

$$X \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = 0,$$

d'où

$$X R^\lambda_{\cdot\,\mu\nu\omega} = 0, \qquad X(R^\lambda_{\cdot\,\mu\nu\omega;\,a}) = 0, \ \ldots\ldots$$

Donc, nous avons le

Théoreme 8 : Pour qu'un espace de Riemann admette un groupe Xf de mouvements, il faut et il suffit qu'il admette un groupe de transformations qui conservent les symboles de Christoffel, le tenseur de courbure et ses dérivées covariantes successives.

---

(1) Voir la première Note.

Cela étant, nous allons considérer les conditions d'intégrabilité complète des équations différentielles $X g_{\mu\nu} = 0$. Des équations $X g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$, on tire

$$X \left\{ {}^{\lambda}_{\mu\nu} \right\} = \xi^{\lambda}{}_{;\mu;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} \xi^{\omega} = 0,$$

$$X R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \xi^{a} R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;a} - \xi^{\lambda}{}_{;a} R^{a}_{\cdot\mu\nu\omega} + \xi^{a}{}_{;\mu} R^{\lambda}_{\cdot a\nu\omega} + \xi^{a}{}_{;\nu} R^{\lambda}_{\cdot\mu a\omega} + \xi^{a}{}_{;\omega} R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu a}.$$

Donc, les conditions d'intégrabilité complète de $X g_{\mu\nu} = 0$ sont

$$g_{\lambda a} (X R^{a}_{\cdot\mu\nu\omega}) \equiv \xi^{a} R_{\lambda\mu\nu\omega;a} - \xi_{\lambda;a} R^{a}_{\cdot\mu\nu\omega} - \xi_{a;\mu} R^{a}_{\cdot\lambda\nu\omega}$$
$$+ \xi_{a;\nu} R^{a}_{\cdot\omega\lambda\mu} - \xi_{a;\omega} R^{a}_{\cdot\nu\lambda\mu} = 0$$

pour n'importe quel ξ^{λ} et pour $\xi_{\mu;\nu}$ satisfaisant à $\xi_{\mu;\nu} = -\xi_{\nu;\mu}$.
Donc, on a d'abord

$$R_{\lambda\mu\nu\omega;a} = 0,$$

et ensuite

$$\xi_{a;\beta} [\delta^{a}_{\lambda} R^{\beta}_{\cdot\mu\nu\omega} + R^{a}_{\cdot\lambda\nu\omega} \delta^{\beta}_{\mu} - R^{a}_{\cdot\omega\lambda\mu} \delta_{\nu\beta} + R^{a}_{\cdot\nu\lambda\mu} \delta^{\beta}_{\omega}] = 0,$$

d'où

$$\delta^{[a}_{\lambda} R^{\beta]}_{\cdot\mu\nu\omega} + R^{[a}_{\cdot\lambda\nu\omega} \delta^{\beta]}_{\mu} - R^{[a}_{\cdot\omega\lambda\mu} \delta^{\beta]}_{\nu} + R^{[a}_{\cdot\nu\lambda\mu} \delta^{\beta]}_{\omega} = 0.$$

En contractant par rapport à λ et β, on trouve

$$R^{a}_{\cdot\mu\nu\omega} = \frac{1}{n-1} (R_{\mu\nu} \delta^{a}_{\omega} - R_{\mu\omega} \delta^{a}_{\nu}).$$

Donc, l'espace est un espace projectif à un espace euclidien, donc, d'après un théorème bien connu, on peut en conclure que notre espace est de courbure constante et par conséquent

$$R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{\mu\nu} \delta^{\lambda}_{\omega} - g_{\mu\omega} \delta^{\lambda}_{\nu}).$$

Dans ce cas, on peut donner les valeurs initiales de ξ^{λ} et $\xi_{\mu;\nu} = -\xi_{\nu;\mu}$ arbitrairement, donc, les solutions contiennent $n + \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2} n(n+1)$ constantes arbitraires. Donc, on a le

Théorème 9 : Pour qu'un espace de Riemann admette un groupe de mouvements d'ordre maximum $\frac{1}{2} n(n+1)$, il faut et il suffit que l'espace se réduise à un espace de courbure constante.

Cela étant, considérons un espace d'Einstein, alors on aura

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{n} R g_{\mu\nu},$$

R étant une constante. En appliquant l'opérateur X à ces équations, on trouve

$$X R_{\mu\nu} = \frac{1}{n} R X g_{\mu\nu}.$$

Donc, on obtient le

Théorème 10 : Dans un espace d'Einstein, si une transformation infinitésimale conserve le tenseur de Ricci, elle est un mouvement infinitésimal.

Un espace de courbure constante étant un espace d'Einstein, on trouve, comme un colloraire de ce Théorème, le

Théorème 11 : Dans un espace de courbure constante, une transformation infinitésimale qui conserve le tenseur de courbure est un movement infinitésimal.

Or, supposons qu'un espace de Riemann admette un groupe de collinéations affines à r ($\leqq n(n+1)$) paramètres et désignons par $X_a f = \xi^\lambda_a f,_\lambda$ les symboles du groupe. Alors on aura

$$(X_b X_c)f = c_{bc}^{\cdot\cdot a} X_a f,$$
$$X_a \{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} = 0.$$

On se demande si ce groupe contient un sous-groupe qui est un groupe de mouvements. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'il existe r constantes c^a telles que $Xf = c^a X_a f$ est un mouvement, soit

$$X g_{\mu\nu} = c^a (X_a g_{\mu\nu}) = 0.$$

Donc, il est tout d'abord nécessaire que le rang de la matrice $X_a g_{\mu\nu}$ à r lignes et $\frac{1}{2}n(n+1)$ colonnes soit moins que r.

Inversement, si le rang s de la matrice $X_a g_{\mu\nu}$ est moins que r, on peut trouver $r-s$ fonctions $\phi^a_i(x)$ linéairement indépendantes telles qu'on ait

(3.12) $$\phi^a_j (X_a g_{\mu\nu}) = 0, \qquad (i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, r-s).$$

En prenant la dérivée covariante de ces équations, on trouve

(3.13) $$\phi^a_{j;\omega} (X_a g_{\mu\nu}) = 0,$$

grâce aux équations

$$(X_a g_{\mu\nu})_{;\omega} = 0$$

tirées des identités

$$X_a (g_{\mu\nu;\omega}) - (X_a g_{\mu\nu})_{;\omega} = g_{a\nu} X_a \{{}^{a}_{\mu\omega}\} + g_{\mu a} X_a \{{}^{a}_{\nu\omega}\} = 0.$$

Donc, $\phi^a_{j;\omega}$ doivent être des combinaisons linéaires des ϕ^a_i, d'où

(3.14) $$\phi^a_{j;\omega} = \phi^a_i A^i_{j\omega},$$

dont les conditions d'intégrabilité sont

(3.15) $$A^i_{j\omega,\sigma} - A^i_{j\sigma,\omega} + A^k_{j\omega} A^i_{k\sigma} - A^k_{j\sigma} A^i_{k\omega} = 0.$$

Or, s'il existe des fonctions f^i telles que

$$c^a = f^j \phi^a_j$$

soient des constantes, le groupe de collinéations affines contient un sous-groupe de mouvements. Pour que les c^a soient des constantes, nous devons avoir

$$f^j_{;\omega} \phi^a_j + f^j \phi^a_{j;\omega} = 0,$$
$$(f^i_{;\omega} + f^j A^i_{j\omega}) \phi^a_i = 0,$$

d'où

$$f^i_{;\omega} + f^j A^i_{j\omega} = 0,$$

c'est-à-dire, les fonctions f^i doivent satisfaire à ces équations. Mais les conditions d'intégrabilité de ces équations sont précisément (3.15). Donc, nous avons le

Théorème 12: Pour qu'un groupe de collinéations affines à r parametres d'un espace de Riemann contienne un sous-groupe de mouvements, il faut et il suffit que le rang de la matrice $X_a g_{\mu\nu}$ *à* r *lignes et* $\frac{1}{2}n(n+1)$ *colonnes soit inférieur que* r.