54. Quelques remarques sur les groupes de transformations dans les espaces à connexion linéaire V.[1]

Par Kentaro YANO et Yasuro TOMONAGA.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA. M. I. A., Oct. 12, 1946.)

§ 5. *Collinéations projectives.*

Prenons un espace à n dimensions à connexion affine symétrique dont les composantes de la connexion affine sont données par $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, et par conséquent, dont les paths sont définis par les équations différentielles de la forme

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0, \tag{5.1}$$

où s est un paramètre affine, et considérons, dans cet espace à connexion affine, une transformation infinitésimale

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda+\xi^\lambda(x)\,\delta t \tag{5.2}$$

qui déplace chaque point x^λ de l'espace en un autre point $\bar{x}^\lambda$ infiniment voisin du point original.

Cela étant, nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation infinitésimale (5.2) change chaque path de l'espace en un aure path de l'espace, le paramètre affine n'étant pas nécessairement conservé.

On sait que

$$\frac{d\bar{x}^\lambda}{ds}=(\delta^\lambda_\alpha+\xi^\lambda_{,\,\alpha}\,\delta t)\frac{dx^\alpha}{ds}, \tag{5.3}$$

$$\frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{ds^2}=(\delta^\lambda_\alpha+\xi^\lambda_{,\,\alpha}\,\delta t)\frac{\delta^2x^\alpha}{ds^2}+(X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\,\delta t, \tag{5.4}$$

d'où

$$\frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}}=(\delta^\lambda_\alpha+\xi^\lambda_{,\,\alpha}\,\delta t)\frac{dx^\alpha}{ds}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right), \tag{5.5}$$

$$\frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^2}=(\delta^\lambda_\alpha+\xi^\lambda_{,\,\alpha}\,\delta t)\frac{\delta^2x^\alpha}{ds^2}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2+\left(X\,\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2\delta t$$
$$+(\delta^\lambda_\alpha+\xi^\lambda_{,\,\alpha}\,\delta t)\frac{dx^\alpha}{ds}\left(\frac{d^2s}{d\bar{s}^2}\right). \tag{5.6}$$

En posant $\quad d\bar{s}=ds+D\,ds,$

on a

---

(1) Les Notes I, II, III et IV ont été publiées dans ces Proc., 22 (1946), 41-47; 67-72; 167-172; 173-183.

$$(5.7)\qquad \frac{d\bar{s}}{ds} = 1 + \frac{Dds}{ds}, \quad \frac{ds}{d\bar{s}} = 1 - \frac{Dds}{ds},$$

et les equations (5.5) et (5.6) deviennent

$$(5.8)\qquad \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}} = (\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\frac{dx^\alpha}{ds} - \frac{dx^\lambda}{ds}\frac{Dds}{ds},$$

$$(5.9)\qquad \frac{\delta^2\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^2} = (\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\frac{\delta^2 x^\alpha}{ds^2} + (X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t - 2\frac{\delta^2 x^\lambda}{ds^2}\frac{Dds}{ds} - \frac{dx^\lambda}{ds}\frac{d}{ds}\frac{Dds}{ds}.$$

Donc, pour que la transformation infinitésimale (5.2) change un path arbitraire de l'espace en un autre path infiniment voisin, il faut et il suffit qu'on ait

$$(X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t - \frac{dx^\lambda}{ds}\frac{d}{ds}\frac{Dds}{ds} = 0$$

pour n'importe quel vecteur $\frac{dx^\lambda}{ds}$, d'où

$$(5.10)\qquad X\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\mu \varphi_\nu + \delta^\lambda_\nu \varphi_\mu,$$

où φ_ν est un vecteur covariant arbitraire.

Inversement, si $X\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ a la forme (5.10), la transformation infinitésimale (5.2) change chaque path de l'espace en un autre path du même espace.

Une telle transformation infinitésimale s'appelle une collinéation projective infinitésimale de l'espace. Donc, nous avons le

Théorème 1: Pour qu'un espace à connexion affine sans torsion admette une collinéation projective infinitésimale, il faut et il suffit qu'il existe un champ de vecteur contrevariant satisfaisant à (5.10).

Or, nous avons introduit, dans les deux Notes précédentes,(1) les coniques projectives par les équations différentielles

$$(5.11)\qquad \frac{d}{ds}\{t, s\} + \frac{d}{ds}a^0 + \Pi^0_{\mu\nu}a^\mu\frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

$$(5.12)\qquad \frac{\delta^3 x^\lambda}{ds^3} + (2\{t, s\} + a^0)\frac{dx^\lambda}{ds} = 0$$

dans un espace à connexion projective normale, où

$$\{t, s\} = \frac{\frac{d^3t}{ds^3}}{\frac{dt}{ds}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2t}{ds^2}}{\frac{dt}{ds}}\right)^2,$$

$$a^0 = \Pi^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}, \quad a^\lambda = \frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds},$$

(1) K. Yano et K. Takano: Sur les coniques dans les espaces a connexion affine ou projective I, II. Proc., **20** (1944), 410–417; 418–424.

$$\Pi^0_{\mu\nu} = -\frac{1}{n^2-1}(n R_{\mu\nu} + R_{\nu\mu}), \quad R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\alpha},$$

$$R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\,\omega} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\omega,\,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\omega} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\omega}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu},$$

t et s étant les paramètres projectif et affine respectivement.

Nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation infinitésimale (5.2) change chaque conique projective de l'espace en une autre coniqne projective du même espace, le paramètre projectif restant toujours être projectif pour les deux coniques.

Nous avons d'abord

$$\{t, \bar{s}\} = (\{t, s\} - \{\bar{s}, s\}) / \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2.$$

En y substituant

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = 1 + \frac{Dds}{ds} \quad \text{et} \quad \{\bar{s}, s\} = \frac{d^2}{ds^2}\frac{Dds}{ds},$$

on trouve

$$\{t, \bar{s}\} = \{t, s\} - 2\{t, s\}\frac{Dds}{ds} - \frac{d^2}{ds^2}\frac{Dds}{ds}, \tag{5.13}$$

d'où

$$\frac{d}{d\bar{s}}\{t, \bar{s}\} = \frac{d}{ds}\{t, s\} - 3\frac{d}{ds}\{t, s\}\frac{Dds}{ds} - 2\{t, s\}\frac{d}{ds}\frac{Dds}{ds} - \frac{d^3}{ds^3}\frac{Dds}{ds}. \tag{5.14}$$

Cela étant, calculons ensuite $\bar{a}^0$:

$$\bar{a}^0 = \Pi^0_{\mu\nu}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^\mu}{d\bar{s}}\frac{d\bar{x}^\nu}{d\bar{s}}$$

$$= (\Pi^0_{\mu\nu} + \Pi^0_{\mu\nu,\,\omega}\xi^\omega\delta t)(\delta^\mu_\beta + \xi^\mu_{,\beta}\delta t)(\delta^\nu_\gamma + \xi^\nu_{,\gamma}\delta t)\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2,$$

et par conséqnent nous avons

$$\bar{a}^0 = a^0 + (X\Pi^0_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t - 2a^0\frac{Dds}{ds}, \tag{5.15}$$

d'où

$$\frac{d\bar{a}^0}{d\bar{s}} = \frac{da^0}{ds} + \frac{d}{ds}\left[(X\Pi^0_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]\delta t - 3\frac{da^0}{ds}\frac{Dds}{ds} - 2a^0\frac{d}{ds}\frac{Dds}{ds}. \tag{5.16}$$

Nous allons enfin calculer

$$\Pi^0_{\mu\nu}(\bar{x})\bar{a}^\mu\frac{d\bar{x}^\nu}{d\bar{s}} = (\Pi^0_{\mu\nu} + \Pi^0_{\mu\nu,\,\omega}\xi^\omega\delta t)$$

$$\times\left[(\delta^\mu_\beta + \xi^\mu_{,\beta}\delta t)a^\beta + (X\Pi^\mu_{\beta\gamma})\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} - 2a^\mu\frac{Dds}{ds} - \frac{dx^\mu}{ds}\frac{d}{ds}\frac{Dds}{ds}\right]$$

$$\times\left[(\delta^\nu_\tau + \xi^\nu_{,\tau}\delta t)\frac{dx^\tau}{ds} - \frac{dx^\nu}{ds}\frac{Dds}{ds}\right],$$

d'où

$$\Pi^0_{\mu\nu}(\bar{x})\bar{a}^\mu\frac{d\bar{x}^\nu}{ds} = \Pi^0_{\mu\nu}a^\mu\frac{dx^\nu}{ds} + (X\Pi^0_{\mu\nu})a^\mu\frac{dx^\nu}{ds}\delta t + \Pi^0_{\alpha\nu}(X\Gamma^\alpha_{\mu\omega})$$
$$\times\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}\delta t - 3\Pi^0_{\mu\nu}a^\mu\frac{dx^\nu}{ds}\frac{Dds}{ds} - a^0\frac{d}{ds}\frac{Dds}{ds}. \tag{5.17}$$

Les équations (5. 14), (5. 16) et (5. 17) nous donnent

$$(5.18)\quad \frac{d}{d\bar{s}}\{t, \bar{s}\} + \frac{d}{d\bar{s}}\bar{a}^0 + \Pi^0_{\mu\nu}(\bar{x})\,\bar{a}^\mu \frac{d\bar{x}^\nu}{d\bar{s}}$$
$$= \left[\frac{d}{ds}\{t, s\} + \frac{d}{ds}a^0 + \Pi^0_{\mu\nu}\,a^\mu \frac{dx^\nu}{ds}\right]\left(1 - 3\frac{D\,ds}{ds}\right)$$
$$+ \frac{d}{ds}\left[(X\Pi^0_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t\right] + (X\Pi^0_{\mu\nu})\,a^\mu\frac{dx^\nu}{ds}\delta t + \Pi^0_{\alpha\nu}(X\Gamma^\alpha_{\mu\omega})$$
$$\times \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}\delta t - [2\{t, s\} + 3a^0]\frac{d}{ds}\frac{D\,ds}{ds} - \frac{d^3}{ds^3}\frac{D\,ds}{ds}$$

On a, d'autre part,

$$(5.19)\quad \frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{ds^3} = (\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\frac{\delta^3 x^\alpha}{ds^3} + \frac{d}{ds}\left[(X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]\delta t$$
$$+ (X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds},$$

d'ou

$$(5.20)\quad \frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^3} = (\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\frac{\delta^3 x^\lambda}{ds^3}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3 + \frac{d}{ds}\left[(X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3\delta t$$
$$+ (X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3\delta t + 3(\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\frac{\delta^2 x^\alpha}{ds^2}\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{d^2 s}{d\bar{s}^2}$$
$$+ 3(X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{d^2 s}{d\bar{s}^2}\delta t + (\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{d^3 s}{d\bar{s}^3}$$

ou

$$(5.21)\quad \frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^3} = (\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\frac{\delta^3 x^\lambda}{ds^3} + (X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}\delta t$$
$$+ 3(X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t - 3\frac{\delta^3 x^\lambda}{ds^3}\frac{D\,ds}{ds} - 3\frac{\delta^2 x^\lambda}{ds^2}\frac{d}{ds}\frac{D\,ds}{ds}$$
$$- \frac{dx^\lambda}{ds}\frac{d^2}{ds^2}\frac{D\,ds}{ds}.$$

Donc, les équations (5.8), (5. 13), (5. 15) et (5.21) nous donnent

$$(5.22)\quad \frac{\delta^3\bar{x}^\lambda}{\delta\bar{s}^3} + [2\{t, \bar{s}\} + \bar{a}^0]\frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}}$$
$$= (\delta^\lambda_\alpha + \xi^\lambda_{,\alpha}\delta t)\left[\frac{\delta^3 x^\alpha}{ds^3} + (2\{t, s\} + a^0)\frac{dx^\alpha}{ds}\right] - 3\left[\frac{\delta^3 x^\lambda}{ds^3} + (2\{t, s\}\right.$$
$$\left. + a^0)\frac{dx^\lambda}{ds}\right]\frac{D\,ds}{ds} + (X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}\delta t + 3(X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t$$
$$- 3\frac{\delta^2 x^\lambda}{ds^2}\frac{d}{ds}\frac{D\,ds}{ds} - 3\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{d^2}{ds^2}\frac{D\,ds}{ds} + \frac{dx^\lambda}{ds}(X\Pi^0_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t.$$

Par conséquent, pour que la transformation infinitésimale (5.2) change chaque conique projective en une autre conique projective, il faut et il suffit qu'on ait

$$(5.23)\quad -[2\{t, s\} + 3a^0]\frac{d}{ds}\frac{D\,ds}{ds} - \frac{d^3}{ds^3}\frac{D\,ds}{ds}$$
$$+ \frac{d}{ds}\left[(X\Pi^0_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]\delta t + (X\Pi^0_{\mu\nu})\,a^\mu\frac{dx^\nu}{ds}\delta t$$

$$+ \Pi^0_{\alpha\omega}(X\Gamma^\alpha_{\mu\nu})\frac{dx}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}\delta t = 0,$$

(5.24) $$(X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\omega}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}\delta t + 3(X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t$$

$$-3\frac{\delta^2 x^\lambda}{ds^2}\frac{d}{ds}\frac{Dds}{ds} - 3\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{d^2}{ds^2}\frac{Dds}{ds} + \frac{dx^\lambda}{ds}(X\Pi^0_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta t = 0$$

pour n'importe quels vecteurs $\frac{\delta^2 x^\lambda}{ds^2}$ et $\frac{dx^\lambda}{ds}$, d'où

(5.25) $$X\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\mu \varphi_\nu + \delta^\lambda_\nu \varphi_\mu,$$

ou nous avons posé

(5.26) $$\frac{d}{ds}\frac{Dds}{ds} = \varphi_\nu \frac{dx^\nu}{ds}\delta t.$$

Inversement, si la condition (5.25) est satisfaite, en la substituant dans

$$XR^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega} = (X\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\omega} - (X\Gamma^\lambda_{\mu\omega})_{;\nu}$$

on trouve

$$XR^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega} = \delta^\lambda_\mu \varphi_{\nu;\omega} + \delta^\lambda_\nu \varphi_{\mu;\omega} - \delta^\lambda_\mu \varphi_{\omega;\nu} - \delta^\lambda_\omega \varphi_{\mu;\nu},$$

d'où

(5.27) $$XR_{\mu\nu} = -n\varphi_{\mu;\nu} + \varphi_{\nu;\mu},$$

et par conséquent

(5.28) $$X\Pi^0_{\mu\nu} = \varphi_{\mu;\nu}.$$

Donc, en portant (5.25), (5.26) et (5.28) dans le premier membre de (5.23), on trouve

$$-[2\{t, s\} + 3a^0]\varphi_\nu\frac{dx^\nu}{xs} - \frac{d}{ds}\left[\varphi_{\mu;\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + \varphi_\mu\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\right]$$

$$+\frac{d}{ds}\left[\varphi_{\mu;\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right] + \varphi_{\mu;\nu}\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds} + 2a^0\varphi_\nu\frac{dx^\nu}{ds}$$

$$= -[2\{t, s\} + a^0]\varphi_\nu\frac{dx^\nu}{ds} - \varphi_\nu\frac{\delta^3 x^\nu}{ds^3}$$

$$= 0.$$

Cela étant, substituant (5.25) et (5.8) dans le premier membre de (5.24), on trouve

$$(\delta^\lambda_\mu\varphi_{\nu;\omega} + \delta^\lambda_\nu\varphi_{\mu;\omega})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\omega}{ds} + 3(\delta^\lambda_\mu\varphi_\nu + \delta^\lambda_\nu\varphi_\mu)\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds}$$

$$-3\frac{\delta^2 x^\lambda}{ds}\varphi_\nu\frac{dx^\nu}{ds} - 3\frac{dx^\lambda}{ds}\left[\varphi_{\mu;\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + \varphi_\mu\frac{\delta^2 x^\mu}{ds^2}\right]$$

$$+\frac{dx^\lambda}{ds}\varphi_{\mu;\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

Donc, nous avons le

Théorème 2: Pour qu'une transformation infinitésimale transforme chaque conique projective de l'espace en une autre conique projective, il faut et il suffit que la transformation infinitésimale soit une collinéation projective.

Si l'espace admet une collineation projective infinitesimale (5.2), le champ de vecteur ξ^λ satisfait aux equations (5.25), d'où

$$X\Gamma^{a}_{\mu a} = (n+1)\,\varphi_\mu ,$$

et par conséquent si l'on pose

$$\Pi^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \frac{1}{n+1}(\delta^\lambda_\mu \Gamma^a_{\nu a} + \delta^\lambda_\nu \Gamma^a_{\mu a}), \tag{5.29}$$

on a

$$X\Pi^\lambda_{\mu\nu} = 0. \tag{5.30}$$

Inversement, si le champ de vecteur ξ^λ satisfait à (5.30), $X\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ a la forme (5.25). Donc, nous avons le

Théoreme 3: Pour qu'une transformation infinitésimale (5.2) soit une collinéation projective, il faut et il suffit que le champ de vecteur ξ^λ satisfait aux équations (5.30).

Cela étant, si l'on choisit un système de coordonnées dans lequel on a $\xi^\lambda = \delta^\lambda_1$, les équations (5.25) se réduisent aux équations

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu,1} = \delta^\lambda_\mu \varphi_\nu + \delta^\lambda_\nu \varphi_\mu . \tag{5.31}$$

Par conséquent, les composantes $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ de la connexion affine doit satisfaire, comme les fonctions de x^1, aux équations

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = f^\lambda_{\mu\nu}(x^2, x^3, \ldots, x^n) + \delta^\lambda_\mu \psi_\nu + \delta^\lambda_\nu \psi_\mu , \tag{5.32}$$

ψ_ν étant les fonctions arbitraires de $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Donc, nous avons le

Théoreme 4: Pour que l'espace admette une collinéation projective infinitésimale, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées dans lequel les composanes de la connexion a la forme (5 32).

Dans un tel système de coordonnées, les équations (5.30) se réduisent aux

$$\Pi^\lambda_{\mu\nu,1} = 0. \tag{5.33}$$

Donc, nous avons le

Théorème 5: Pour que l'espace admette une collinéation projective infinitésimale, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées dans lequel les composantes $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ de la connexion projective de M. T. Y. Thomas soient indépendantes d'une des variables x^λ.

Les Theorèmes 4 et 5 nons donnent le

Théoreme 6: Si l'espace à connexion affine admet une collinéation projective infinitésimale, il admet un groupe de collineations projectives à un paramètre engendré par cette collinéation projective infinitésimale.

En outre, les équations (5.32) nous donnent le

Théorème 7: Si un espace à connexion affine admet un groupe de collinéations projectives à un paramètre, alors, un espace à connexion affine

$\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\phi_{\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu}\phi_{\mu}$, *soit, un espace à connexion affine qui sera obtenu, de l'espace original, par un changement projectif de la connexion affine admet aussi un groupe de collinéations projectives.*

Cela étant, considérons r transformations infinitésimales

(5.34) $$\bar{x}^{\lambda} = x^{\lambda} + \xi^{\lambda}_{a}\delta t \qquad (a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, r)$$

de l'espace, alors, on aura

(5.35) $$(X_b X_c)\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = X_{bc}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu},$$

où X_{bc} sont les symboles definis par les vecteurs

$$\xi^{\lambda}_{bc} = \xi^{a}_{b}\xi^{\lambda}_{c,a} - \xi^{a}_{c}\xi^{\lambda}_{b,a} = \xi^{a}_{b}\xi^{\lambda}_{c;a} - \xi^{a}_{c}\xi^{\lambda}_{b;a}.$$

Or, si les r transformations infinitésimales $\delta x^{\lambda} = \xi^{\lambda}_{a}\delta t$ sont les collinéations projectives infinitésimales de l'espace indépendantes les unes des autres, on aura

$$X_c\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{c\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu}\varphi_{c\mu},$$

d'où

$$X_b X_c \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu} X_b\varphi_{c\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu} X_b\varphi_{c\mu},$$

et par suite

(5.36) $$(X_b X_c)\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = X_{bc}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu}(X_b\varphi_{c\nu} - X_c\varphi_{b\nu}) + \delta^{\lambda}_{\nu}(X_b\varphi_{c\mu} - X_c\varphi_{b\mu}).$$

Si l'on adopte les composantes $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ de la connexion projective de M.T.Y. Thomas, les équations (5.35) deviennet

(5.37) $$(X_b X_c)\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = X_{bc}\Pi^{\lambda}_{\mu\nu},$$

et si X_b définissent r collinéations projectives, on aura

(5.38) $$(X_b X_c)\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = X_{bc}\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = 0.$$

Donc, nons avons le

Théorème 8: Si $X_a f$ sont les symboles de r groupes de collinéations projectives à un paramètre, $(X_b X_c)f$ sont aussi les symboles des groupes de collinéations projectives à un paramètre.

Si $X_a f$ sont les symboles d'un ensemble complet de r groupes de collinéations projectives à un paramètre, on a

$$\xi^{\lambda}_{bc} = \xi^{a}_{b}\xi^{\lambda}_{c,a} - \xi^{a}_{c}\xi^{\lambda}_{b,a} = c_{bc}^{\cdot\cdot a}\xi^{\lambda}_{a},$$

et par conséquent, on trouve, de (5.35),

(5.39) $$(X_b X_c)\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = c_{bc}^{\cdot\cdot a} X_a\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu},$$

et, de (5.37),

(5.40) $$(X_b X_c)\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = c_{bc}^{\cdot\cdot a} X_a\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}.$$

Donc, on a le

Théorème 9: Si $X_a f$ sont les symboles d'un ensemble complet de groupes de collinéations projectives à un parametre, les $X_a f$ sont les symboles d'un groupe de collinéations projectives à r paramètres.

Cela étant, nous allons considérer les conditions d'intégrabilité complète des équations différentielles

(5.41) $$X\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \xi^{\lambda}_{;\mu;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\,\xi^{\omega} = \delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu}\varphi_{\mu}.$$

La condition d'intégrabilité complète de ces équations sont

$$XR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = (X\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\omega} - (X\Gamma^{\lambda}_{\mu\omega})_{;\nu}.$$

En y substituant (5.25), on trouve

(5.42) $$XR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \delta^{\lambda}_{\mu}(\varphi_{\nu;\omega} - \varphi_{\omega;\nu}) - \varphi_{\mu;\nu}\delta^{\lambda}_{\omega} + \varphi_{\mu;\omega}\delta^{\lambda}_{\nu},$$

d'où

(5.43) $$X\Pi^{0}_{\mu\nu} = \varphi_{\mu;\nu},$$

et par suite, en le substituant dans les équations (5.42), on trouve

(5.44) $$XW^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0,$$

où

(5.45) $$W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - \frac{1}{n^2-1}(nR_{\mu\nu} + R_{\nu\mu})\delta^{\lambda}_{\omega} + \frac{1}{n^2-1}(nR_{\mu\omega} + R_{\omega\mu})\delta^{\lambda}_{\nu} + \frac{\delta^{\lambda}_{\mu}}{n-1}(R_{\nu\omega} - R_{\omega\nu})$$

est le tenseur projectif de courbure de M. H. Weyl.

Pour trouver la condition d'intégrabilité de (5.43), rappelons les formules générales

$$X(\Pi^{0}_{\mu\nu;\omega}) - (X\Pi^{0}_{\mu\nu})_{;\omega} = -\Pi^{0}_{\alpha\nu}(X\Gamma^{\alpha}_{\mu\omega}) - \Pi^{0}_{\mu\alpha}(X\Gamma^{\alpha}_{\nu\omega}),$$

d'où

$$X(\Pi^{0}_{\mu\nu;\omega} - \Pi^{0}_{\mu\omega;\nu}) = (\varphi_{\mu;\nu;\omega} - \varphi_{\mu;\omega;\nu}) - \Pi^{0}_{\mu\nu}\varphi_{\omega} + \Pi^{0}_{\omega\nu}\varphi_{\mu} + \Pi^{0}_{\mu\omega}\varphi_{\nu} - \Pi^{0}_{\omega\nu}\varphi_{\mu},$$

et par suite

(5.46) $$XW^{0}_{\mu\nu\omega} = -\varphi^{\lambda}\,W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega},$$

où nous avons posé

(5.47) $$W^{0}_{\cdot\mu\nu\omega} = \Pi^{0}_{\mu\nu;}\ - \Pi^{0}_{\mu\omega;\nu}.$$

Pour trouver la conditi n d'intégrabilité de (5.44), portons (5.25) et (5.44) dans les identités

$$X(W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\tau}) - (XW^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega})_{;\tau}$$
$$= -W^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\omega}(X\Gamma^{\lambda}_{\alpha\tau}) - W^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu\omega}(X\Gamma^{\alpha}_{\mu\tau}) - W^{\lambda}_{\cdot\mu\alpha\omega}(X\Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}) - W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\alpha}(X\Gamma^{\alpha}_{\omega\tau}),$$

alors, on aura

(5.48) $$X(W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\tau}) = -2W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\varphi_{\tau} + \varphi_{\alpha}W^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\omega}\delta^{\lambda}_{\tau} - W^{\lambda}_{\cdot\tau\nu\omega}\varphi_{\mu} - W^{\lambda}_{\cdot\mu\tau\omega}\varphi_{\nu} - W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\tau}\varphi_{\omega}.$$

Pour trouver ensuite la condition d'intégrabilité de (5.46), portons (5.25) et (5.46) dans

$$X(W^{0}_{\cdot\mu\nu\omega;\tau}) - (XW^{0}_{\cdot\mu\nu\omega})_{;\tau}$$
$$= -W^{0}_{\cdot\alpha\nu\omega}(X\Gamma^{\alpha}_{\mu\tau}) - W^{0}_{\cdot\mu\alpha\omega}(X\Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}) - W^{0}_{\cdot\mu\nu\alpha}(X\Gamma^{\alpha}_{\omega\tau}),$$

alors, on aura

$$X(W^{0}_{\cdot\mu\nu\omega;\tau}) = -\varphi_{\lambda;\tau} W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - \varphi_\lambda W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\tau}$$
$$-3 W^{0}_{\cdot\mu\nu\omega}\varphi_\tau - W^{0}_{\cdot\tau\nu\omega}\varphi_\mu - W^{0}_{\cdot\mu\tau\omega}\varphi_\mu - W^{0}_{\cdot\mu\nu\tau}\varphi_\omega,$$

d'où

$$X(W^{0}_{\cdot\mu\nu\omega;\tau}) = -(X\Pi^{0}_{\lambda\tau}) W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - \varphi_\lambda W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;\tau}$$
$$-3 W^{0}_{\cdot\mu\nu\omega}\varphi_\tau - W^{0}_{\cdot\tau\nu\omega}\varphi_\mu - W^{0}_{\cdot\mu\tau\omega}\varphi_\nu - W^{0}_{\cdot\mu\nu\tau}\varphi_\omega, \tag{5.49}$$

ainsi de suite. Donc, nous avons le

Théoreme 10: Pour que l'espace admette une collinéation projective, il faut et il suffit que les équations (5.44), (5.46), (5.48), (5.49), ... soiont algébraiquement compatibles par rapport aux ξ^λ, $\xi^{\lambda}_{;\mu}$ *et* φ_μ.

Cela étant, nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (5.25) soient complètement intégrable, c'est-à-dire, pour que l'espace admette un groupe de collinéations projectives d'ordre maximum.

Pour cela, il faut et il suffit qu'on ait

$$X W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} \equiv \xi^{a} W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;a} - \xi^{\lambda}_{;a} W^{a}_{\cdot\mu\nu\omega} + \xi^{a}_{;\mu} W^{\lambda}_{\cdot a\nu\omega} + \xi^{a}_{;\nu} W^{\lambda}_{\cdot\mu a\omega} + \xi^{a}_{;\omega} W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu a} = 0 \tag{5.50}$$

et

$$X W^{0}_{\cdot\mu\nu\omega} \equiv \xi^{a} W^{0}_{\cdot\mu\nu\omega;a} - \xi^{a}_{;\mu} W^{0}_{\cdot a\nu\omega} - \xi^{a}_{;\nu} W^{0}_{\mu a\omega} - \xi^{a}_{;\omega} W^{0}_{\cdot\mu\nu a} = -\varphi_\lambda W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} \tag{5.51}$$

identiquement pour n'importe quels ξ^λ, $\xi^{\lambda}_{;\mu}$ et φ_μ.

Donc, on a

$$W^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0 \quad \text{et} \quad W^{0}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0, \tag{5.52}$$

et par suite, on trouve le

Théoreme 11: Pour qu'un espace à connexion affine admette un groupe de collinéations projectives d'ordre maximum, il faut et il suffit que l'espace soit projectivement plan.