36. *Quelques remarques sur les groupes de transformations dans les espaces à connexion linéaire, VI.*[1]

Par Kentaro YANO.

Institut Mathématique, Université de Tokyo.

(Comm. by T. KUBOTA, M.I.A., Dec. 12, 1947.)

§ 6. *Les espaces à connexion linéaire qui admettent un groupe de transformations donné.*

Considérons un espace X_n à n dimensions et un groupe continu G_r de transformations à r ($\leqq n$) paramètres. En désignant par

$$X_a f \equiv \xi_a^\lambda f_{,\lambda} \equiv \xi_a^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}, \tag{6.1}$$

$$(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots = 1, 2, \ldots, n\,;\ a, b, c, d, e, f = 1, 2, \ldots, r)$$

les r transformations infinitésimales de G_r, on a, d'après le second théorème fondamental de la théorie des groupes de transformations,

$$(X_b X_c - X_c X_b) f = c_{bc}^{\cdot\cdot a} X_a f, \tag{6.2}$$

où $c_{bc}^{\cdot\cdot a}$ sont les constantes de structure.

Nous supposerons d'abord que le rang de la matrice (ξ_a^λ) soit r. Alors, le système des r équations aux dérivées partielles

$$X_a f \equiv \xi_a^\lambda f_{,\lambda} = 0$$

étant complètement intégrable, il admet $n-r$ solutions indépendantes $\bar{x}^{r+1}(x), \ldots\ldots, \bar{x}^n(x)$. Donc, si l'on effectue une transformation de coordonnées

$$x^\lambda = \bar{x}^\lambda(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

les composantes

$$\bar{\xi}_a^\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \xi_a^\alpha$$

des vecteures ξ_a^λ dans le nouveau système de coordonnées, satisfont aux relations

$$\bar{\xi}_a^\lambda = 0, \qquad (\lambda = r+1, \ldots, n). \tag{6.3}$$

Nous allons supposer qu'on ait choisi un tel système de coordonnées.

Or, la condition pour que le groupe G_r soit le groupe de transformations affines dans un espace à connexion $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ étant

$$X_a \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \xi_{a,\mu,\nu}^\lambda + \xi_a^\alpha \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\lambda - \xi_{a,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \xi_{a,\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda + \xi_{a,\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda = 0,$$

elle peut aussi être écrites sous la forme :

$$X_a \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \xi_{a,\mu,\nu}^\lambda + \xi_a^e \Gamma_{\mu\nu,e}^\lambda - \xi_{a,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \xi_{a,\mu}^e \Gamma_{e\nu}^\lambda + \xi_{a,\nu}^e \Gamma_{\mu e}^\lambda = 0.$$

---

1) Les Notes I, II, III, IV et V ont été publiées dans ces Proc., 22 (1946).

Le rang de la matrice (ξ_a^e) étant r, on peut définir les fonctions $H^\lambda_{\mu\nu e}(x, \Gamma)$ par

$$-\xi_a^e H^\lambda_{\mu\nu e}(x, \Gamma)=\xi^\lambda_{a,\mu,\nu}-\xi^\lambda_{a,\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}+\xi^e_{a,\mu}\Gamma^\lambda_{e\nu}+\xi^e_{a,\nu}\Gamma^\lambda_{\mu e},$$

et on obtient

$$X_a\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\equiv\xi^e_a[\Gamma^\lambda_{\mu\nu,e}-H^\lambda_{\mu\nu e}(x, \Gamma)]. \tag{6.4}$$

Des équations (6.4), on obtient un système des équations aux dérivées partielles

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu,e}=H^\lambda_{\mu\nu e}(x, \Gamma). \tag{6.5}$$

Nous allons démontrer que ce système est complètement intégrable. En substituant (6.4) dans les identités

$$(X_bX_c-X_cX_b)\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=c^{\cdot\cdot a}_{bc}X_a\Gamma^\lambda_{\mu\nu},$$

et en tenant compte des relations $X_c\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=0$, on trouve

$$\xi^e_b\xi^f_c\left[\left(\frac{\partial H^\lambda_{\mu\nu e}}{\partial x^f}+\frac{\partial H^\lambda_{\mu\nu e}}{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}H^\alpha_{\beta\gamma f}\right)-\left(\frac{\partial H^\lambda_{\mu\nu f}}{\partial x^e}+\frac{\partial H^\lambda_{\mu\nu f}}{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}H^\alpha_{\beta\gamma e}\right)\right]=0,$$

d'où

$$\frac{\partial H^\lambda_{\mu\nu e}}{\partial x^f}+\frac{\partial H^\lambda_{\mu\nu e}}{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}H^\alpha_{\beta\gamma f}=\frac{\partial H^\lambda_{\mu\nu f}}{\partial x^e}+\frac{\partial H^\lambda_{\mu\nu f}}{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}H^\alpha_{\beta\gamma e}, \tag{6.6}$$

ce qui montre que le système des équations aux dérivées partielles (6.5) est complètement intégrable et ses solutions sont déterminées par les valeurs initiales arbitraires de $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ qui peuvent être, si $r<n$, fonctions arbitraires des variables $x^{r+1}, \ldots\ldots, x^n$. Donc, nous avons le *Théorème 6.1*[1]. *Etant donné, dans un espace à n dimensions un groupe continu G_r de transformations à $r(\leqq n)$ paramètres dont le rang de la matrice (ξ^λ_a) est r, il peut toujours être un groupe de transformations affines d'un espace à connexion affine dont les composantes de la connexion contiennent n^3 fonctions arbitraires des $n-r$ variables.*

Nous supposerons ensuite que le rang q de la matrice (ξ^λ_a) soit inférieur à $r(\leqq n)$ et que le rang de la matrice (ξ^λ_i) $(h, i, j, k=1, \ldots, q)$ soit exactement q. Alors on peut poser

$$\xi^\lambda_l=\varphi^i_l\xi^\lambda_i \qquad (l, m=q+1, \ldots, r), \tag{6.7}$$

φ^i_l étant les fonctions de x^λ.

Des équations (6.2), on tire

$$\begin{aligned}(X_jX_k-X_kX_j)f&=c^{\cdot\cdot a}_{jk}X_af\\&=c^{\cdot\cdot i}_{jk}X_if+c^{\cdot\cdot l}_{jk}\varphi^i_lX_if,\end{aligned}$$

ce qui montre que le système des équations aux dérivées partielles

$$X_if=0$$

est complètement intégrable et par conséquent admet $n-q$ solutions indépendantes $\bar{x}^{q+1}(x), \ldots\ldots, \bar{x}^n(x)$.

Si nous effectuons la transformation de coordonnées $\bar{x}^\lambda=\bar{x}^\lambda(x)$, les nouvelles composantes

---

1) M. S. Knebelman: Collineations and motions in generalized spaces. Amer. Journal of Math., 51 (1929), 527-564.

$$\bar{\xi}_a^\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \xi_a^\alpha$$

des vecteurs ξ_a^λ satisfont aux équations

$$\xi_j^\lambda = 0 \qquad (\lambda = q+1, \ldots, n),$$

et le déterminant $|\xi_j^i|$ est différent de zéro. Nous supposerons qu'on ait déjà effectué une telle transformation.

Alors, les équations $X_a \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ nous donnent

$$X_j \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \xi_{j,\mu,\nu}^\lambda + \xi_j^i \Gamma_{\mu\nu,i}^\lambda - \xi_{j,}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \xi_{j,\mu}^i \Gamma_{i\nu}^\lambda + \xi_{j,\nu}^i \Gamma_{\mu i}^\lambda = 0$$

et

$$X_l \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \varphi_{l,\mu,\nu}^i \xi_i^\lambda + \varphi_{l,\mu}^i \xi_{i,\nu}^\lambda + \varphi_{l,\nu}^i \xi_{i,\mu}^\lambda - \varphi_{l,\alpha}^i \xi_i^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$$
$$+ \varphi_{l,\mu}^i \xi_i^j \Gamma_{j\nu}^\lambda + \varphi_{l,\nu}^i \xi_i^j \Gamma_{\mu j}^\lambda + \varphi_l^i X_i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0.$$

Le rang de la matrice (ξ_j^i) étant q, on peut définir les fodctions $H_{\mu\nu j}^\lambda(x, \Gamma)$ et $A_{l\mu\nu}^\lambda(x, \Gamma)$ par

$$-\xi_j^i H_{\mu\nu i}^\lambda(x, \Gamma) = \xi_{j,\mu,\nu}^\lambda - \xi_{j,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \xi_{j,\mu}^i \Gamma_{i\nu}^\lambda + \xi_{j,\nu}^i \Gamma_{\mu i}^\lambda$$

et

$$A_{l\mu\nu}^\lambda(x, \Gamma) = \varphi_{l,\mu,\nu}^i \xi_i^\lambda + \varphi_{l,\mu}^i \xi_{i,\nu}^\lambda + \varphi_{l,\nu}^i \xi_{i,\mu}^\lambda - \varphi_{l,\alpha}^i \xi_i^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$$
$$+ \varphi_{l,\mu}^i \xi_i^j \Gamma_{j\nu}^\lambda + \varphi_{l,\nu}^i \xi_i^j \Gamma_{\mu j}^\lambda$$

respectivement, et on obtient

$$X_j \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \xi_j^i [\Gamma_{\mu\nu,i}^\lambda - H_{\mu\nu i}^\lambda(x, \Gamma)], \tag{6.8}$$

$$X_l \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv A_{l\mu\nu}^\lambda(x, \Gamma) + \varphi_l^i X_i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \tag{6.9}$$

respectivement.

Des équations (6.8) et (6.9), on obtient un système des équations aux dérivées partielles

$$\Gamma_{\mu\nu,i}^\lambda = H_{\mu\nu i}^\lambda(x, \Gamma) \tag{6.10}$$

et

$$A_{l\mu\nu}^\lambda(x, \Gamma) = 0. \tag{6.11}$$

Nous allons montrer que ce système mixte est complètement intégrable.

Des équations (6.2), on tire

$$(X_j X_k - X_k X_j) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \overset{*}{c}{}_{jk}^{i} X_i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \overset{*}{c}{}_{jk}^{l} X_l \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$$
$$= \overset{*}{c}{}_{jk}^{i} X_i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \overset{*}{c}{}_{jk}^{l} (A_{l\mu\nu}^\lambda + \varphi_l^i X_i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda).$$

Si l'on substitute (6.8) et (6.9) dans ces équations, et tient compte de $X_i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ et de $A_{l\mu\nu}^\lambda = 0$, on trouve

$$\xi_j^i \xi_k^h \left[\left(\frac{\partial H_{\mu\nu i}^\lambda}{\partial x^h} + \frac{\partial H_{\mu\nu i}^\lambda}{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha} H_{\beta\gamma h}^\alpha \right) - \left(\frac{\partial H_{\mu\nu h}^\lambda}{\partial x^i} + \frac{\partial H_{\mu\nu h}^\lambda}{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha} H_{\beta\gamma i}^\alpha \right) \right] = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial H_{\mu\nu i}^\lambda}{\partial x^h} + \frac{\partial H_{\mu\nu i}^\lambda}{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha} H_{\beta\gamma h}^\alpha = \frac{\partial H_{\mu\nu h}^\lambda}{\partial x^i} + \frac{\partial H_{\mu\nu h}^\lambda}{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha} H_{\beta\gamma i}^\alpha. \tag{6.12}$$

D'autre part, les équations

$$(X_j X_l - X_l X_j) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \overset{*}{c}{}_{jl}^{a} X_a \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$$
$$= \overset{*}{c}{}_{jl}^{i} X_i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \overset{*}{C}{}_{jl}^{m} (A_{m\mu\nu}^\lambda + \varphi_m^i X_i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda),$$

nous montrent que si l'on tient compte de $X_i\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0$, on a

$$X_j A^{\lambda}_{l\mu\nu}=c_{jl}^{\cdot\cdot m} A^{\lambda}_{m\mu\nu},$$

d'où

$$\frac{\partial A^{\lambda}_{l\mu\nu}}{\partial x^j}+\frac{\partial A^{\lambda}_{l\mu\nu}}{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}} H^{\alpha}_{\beta\gamma j}=\xi^{\lambda}_{j,\alpha} A^{\alpha}_{l\mu\nu}-\xi^{t}_{j,\mu} A^{\lambda}_{lt\nu}-\xi^{t}_{j,\nu} A^{\lambda}_{l\mu t}+c_{jl}^{\cdot\cdot m} A^{\lambda}_{m\mu\nu}. \tag{6.13}$$

Les équations (6.12) et (6.13) montrent que le système mixte des équations aux dérivées partielles (6.10) et (6.11) est complètement intégrable. Donc, on obtient le

Théorème 6.2. Etant donné, dans un espace à n dimensions, un groupe continu G_r de transformations à $r\,(\leqq n)$ paramètres dont le rang q de la matrice (ξ^{λ}_{a}) est inférieur à r, et un système de coordonnées pour lequel on a $\xi^{\lambda}_{i}=0\,(\lambda=q+1, \ldots, n)$, $|\xi^{i}_{j}|$ étant diffirent de zéro, si les équations $A^{\lambda}_{l\mu\nu}=0$ sont compatibles dans Γ quand les coordonnées prennent des valeurs particulières. le groupe peut être celui de tranformations affines d'un espace à connexion affine.

Les mêmes théorèmes, qui affirment qu'un groupe G_r à r paramètres dans $n\,(\geqq r)$ variables peut être le groupe de mouvements, celui de transformations conformes ou celui de transformations projectives, peuvent être énoncés et démontrés par la même méthode. Cela tient au fait suivant :

Si $X_a f$ sont les symboles d'un groupe à r paramètres dans $n\,(\geqq r)$ variables, c'est-à-dire, si l'on a (6.2), alors le système des équations aux dérivées partielles

$$X_a \Omega=0,$$

ou Ω est un objet géométrique tel que la connexion affine, le tenseur fondamental d'un espace de Riemann, la densité fondamentale d'un espace conforme de Riemann ou la connexion projective, est toujours complètement intégrable.