5. *Sur le théorème d'intégrale dû à Cauchy.*

Par Kinjiro KUNUGI.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1947.)

Il s'agit d'un théorème dû à Cauchy qui est connu aujourd'hui comme théorème fondamental de la théorie des fonctions d'une variable complexe :

Soit Γ une courbe de Jordan simple et fermée, située sur le plan des nombres complexes, dont la longueur totale est finie. Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'intérieur D de Γ et continue sur le domaine fermé $D+\Gamma$, l'intégrale prise le long de cette courbe est égale à zéro :

$$\int_\Gamma f(z)dz=0. \tag{1}$$

Ce théorème avait été considéré autrefois seulement pour le cas où

1) Γ est une courbe satisfaisant aux conditions supplémentaires (p. ex. telle qu'elle soit régulière, c.-à-d. une somme d'un nombre fini des courbes ayant la tangente dont la direction se varie d'une manière continue), et où

2) $f(z)$ existe et est continue sur $D+\Gamma$.

Or, la deuxième condition a été franchie par M. E. Goursat[1] en 1900, et la première par MM. S. Pollard,[2] G. A. Pfeiffer,[3] J.-L. Walsh[4] et U. Minami.[5]

Dans cette Note, nous allons donner une démonstration du théorème que nous croyons simple et nouvelle. Nous suivons la voie ouverte par MM. S. Pollard et U. Minami.

Lemme 1. *Soit Γ une courbe de Jordan, simple et fermée, située sur le plan, dont la longueur, soit désignée par L, est finie. Pour tout nombre positif δ $(\delta>0)$ arbitraire, il existe un polygone π, situé dans l'intérieur D de Γ, dont la longueur totale est inférieure à $6L$, et qui satisfait à la condition suivante : Γ et π se décomposent en un même nombre n $(n>3)$ des arcs $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ et $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ rangés dans le même ordre dans Γ et dans π, de sorte que*

1) *pour tous les deux points a, b de $\Gamma_i+\pi_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, on a $\rho(a, b)<\delta$, $\rho(a, b)$ étant la distance entre les points a, b, et que*

1) E. Goursat : Sur la définition générale des fonctions analytiques, d'après Cauchy. Transactions of the Amer. Math. Soc. Vol. 1 (1900), pp. 14-16.

2) S. Pollard : On the conditions for Cauchy's theorem. Proceedings of the London Math. Soc. Second series Vol. 21 (1923), pp. 456-482.

3) G. A. Pfeiffer : A proof of Cauchy's integral theorem for any rectifiable boundary. Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. XXX (1924), p. 213. Cf. aussi E. Kamke : Zu dem Integralsatz von Cauchy. Math. Z. Bd. 35 (1932) p. 539.

4) J.-L. Walsh : On approximation to an arbitrary function of a complex variable by polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 30 (1928), p. 472. Approximation by polynomials in the complex domain (Memorial des Sciences Math. Fascicule LXXII), Paris, 1935.

5) U. Minami : On the Cauchy's integral theorem. Proc. of the Imp. Acad. of Japan, Vol. XVIII (1942), pp. 440-445.

2) *en désignant par P_i et Q_i les points extrêmes finals des arcs Γ_i et π_i resp., le segment rectiligne (P_i, Q_i) (qui se trouve entre P_i et Q_i) se trouve dans l'intérieur D de Γ sauf le point P_i, et n'a pas un point commun avec Γ et π sauf deux extrémités P_i et Q_i.*

Démonstration. 1. Prenons un point P dans l'intérieur D de Γ, et fixons-le. Étant donné un nombre positif δ $(\delta>0)$, nous pouvons choisir un nombre entier positiff n tel que

$$n\delta<12L$$

Prenons encore un point arbitraire S_0 sur Γ et divisons la courbe Γ en n parties par les points $S_1, S_2, \ldots, S_n=S_0$, rangés dans le même ordre que le sens de la courbe Γ, de façon que tous les arcs $S_{i-1}S_i$ aient la même longueur L/n.

Γ étant une courbe de Jordan, simple et fermée, nous avons une transformation $t=\varphi(z)$, $z\varepsilon\Gamma$ biunivoque et bicontinue, dont le point variable t représente point d'une circonférence, qu'on peut supposer donnée par l'équation : $t=(x, y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r>0$. Par suite, nous pouvons poser $\theta=\psi(z)$, ou θ est déterminé lorsqu'on fixe la valeur $\psi(S_0)$ (qui est déterminée à $2\nu\pi$ $(\nu=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ près). Nous avons alors $n+1$ valeurs θ_i telles que $\theta_0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_{n-1}<\theta_n=\theta_0+2\pi$ et que $\theta_i=\psi(S_i)$. Il existe donc les voisinages $I(\theta_i)$ de θ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ (c.-à-d. les intervalles ouverts de la variable θ contenant θ_i), qui sont disjoints les uns des autres. A ces voisinages correspondent des arcs ouverts $J(S_i)$ de Γ contenant S_i. Or, chacun des arcs $J(S_i)$ contient au moins un point P_i accessible rectilinéairement du domaine D. Mais, puisque $\psi(P_i)$ appartiennent à $I(\theta_i)$, nous avons $\psi(P_1)<\psi(P_2)<\ldots<\psi(P_n)$. Posons de plus $P_0=P_n$. On voit bien que tous les arcs $P_{i-1}P_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ de Γ ont les longueurs inférieures à $3L/n<\delta/4$. Ces longueurs des arcs $P_{i-1}P_i$ seront désignées par L_i.

2. Comme P_i sont des points frontiers de D, accessibles rectilinéairement, il existe un segment rectiligne (P_i, R_i), qui se trouve dans D (sauf le point P_i). Ici, nous pouvons supposer que les segments rectiligne (P_i, R_i) sont disjoints et de longueurs inférieures à $L/n<\delta/12$ et que le point P n'est situé sur aucun de ces petits segments.

Maintenant, lions les points R_i au point P avec une ligne brisée γ_i qui est située dans $D-\sum_{i=1}^{n}(P_i, R_i)$ sauf le point R_i. D'ailleurs, nous pouvons supposer que ces courbes γ_i n'ont points communs que P. Ceci est toujours possible, puisque $D-\sum_{i=1}^{n}(P_i, R_i)$ est un domaine.

Désignons par ρ la distance entre la courbe Γ et la somme $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$. On a $\rho>0$, puisque deux ensembles Γ et $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$ sont fermés, bornés et sans point commun.

3. Maintenant, pour chaque i $(i=1, 2, \ldots, n)$ prenons un entier positif n_i tel que

$$L_i/n_i<\rho/2,$$

et partageons l'arc $P_{i-1}\,P_i$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ de Γ en $2\,n_i$ petits arcs de longueur égale à $L_i/(2\,n_i)$. Designons par $p_0^i=P_{i-1}, p_1^i, p_2^i, \ldots\ldots, p_{2ni}^i=P_i$ les points qui divisent l'arc $P_{i-1}\,P_i$ en petits arcs. supposés rangés dans l'ordre de la courbe Γ. Construisons ensuite le carré au centre p_{2j-1}^i $(j=1, 2, \ldots\ldots, n_i)$, et dont les côtés sont paralleles aux axes de coordonnées et de longueur égale à $(4/5)$ (L_i/n_i).

La somme des intérieurs de ces carrés couvre entièrement l'arc P_{i-1} P_i et la frontière de cette somme contient un polygone Δ_i qui enferme l'arc $P_{i-1}\,P_i$ dans son intérieur. Donc, une partie de cette polygone est une partie de cette polygone est une ligne brisée qui parte d'un point Q^*_{i-1} du segment rectiligne (P_{i-1}, R_{i-1}) et se termine à un point Q^{**}_i du segment rectiligne (P_i, R_i) et dont tous les points intermédiaires appartiennent à la régeon (bornee et simplement connexe) déterminée par l'arc $P_{i-1}\,P_i$, deux segments (P_{i-1}, R_{i-1}), (P_i, R_i) et deux courbes γ_{i-1} et γ_i. Cette ligne brisée sera désignée par C_i.

Nous avons $Q^*_{i-1}\neq R_{i-1}$ et $Q^{**}_i\neq R_i$. D'ailleurs, la longueur du polygone Δ_i, et par suite celle de C_i, sont inférieures à $n_i\cdot 4\cdot(5/4)\cdot(L_i/n_i)<5\,L_i$. Désignons par Q_i l'un des points Q^*_i et Q^{**}_i qui est situé plus proche de P_i (sur le segment (P_i, R_i), appelons l'arc π_i la somme

$$(Q_{i-1},\ Q^*_{i-1})+C_i+(Q^{**}_i,\ Q_i)$$

(éventuellement, les deux segments (Q_{i-1}, Q^*_{i-1}) et (Q^{**}_i, Q_i) ou l'un des deux peuvent être composés d'un seul point). Enfin, l'arc P_{i-1} P_i de Γ sera appelé brièvement l'arc Γ_i $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$.

4. Maintenant, il est facile de voir que Γ_i et π_i satisfont à nos conditions désirées. En effet, tout d'abord, tous les points de π_i appartiennent à D. Ensuite, l'arc π_i possède le point Q_{i-1} comme point de π_{i-1} et le point Q_i comme point de π_{i+1}, et les autres de π_i n'appartiennent à aucun des π_j $(j=i)$. Et puis, la longueur totale de $\pi=\sum_{i=1}^{n}\pi_i$ est inférieure à

$$\sum_{i=1}^{n}(5\,L_i)+n\ (L/n)=5\,\sum_{i=1}^{n}L_i+L=6\,L$$

Enfin, soient a, b deux points de $\Gamma_i+\pi_i$. La longueur de Γ_i étant $<\delta/4$, l'inégalité $\rho\ (a, b)<\delta$ sera évidente si l'on a a, $b\in\Gamma_i$. Par suite, si $b\in(Q^{**}_i\ Q_i)$, nous pouvons mettre $a'=P_i$ de sorte qu'on ait $\rho\ (a', b)<\delta/4$. De meme, si $b\in(Q_{i-1}, Q^*_{i-1})$, mettons $a'=P_{i-1}$ et alors nous avons $\rho\ (a', b)<\delta/4$. Or, si $b\in C_i$, b appartiendra nécessairement à un côté d'un carré dont le centre a' appartient à Γ_i. Aussi, nous avons

$$\rho\,(a', b)<(L_i/n_i)\cdot(5/4)\cdot(1/\sqrt{2})<L_i<\delta/4$$

Ainsi, pour tout point a, b de $\pi_i+\Gamma_i$, nous avons deux points a', $b'\in\Gamma_i$ tels que $\rho\ (a, a')<\delta/4$, $\rho\ (b, b')<\delta/4$; par suite

$$\rho\ (a, b)\leq\rho\ (a, a\ )+\rho\ (b, b\ )+\rho\ (a', b')<(3/4)\cdot\delta \text{ c. q. f. d.}$$

Lemme 2. *Soit D un domaine simplement connexe, entouré par une* *courebe de Jordan* Γ *simple et fermée dont la longueur totale L est finie. Soit, encore,* $f(z)$ *une fonction holomorphe dans D et continue sur le domaine fermé* $D+\Gamma$. *Alors pour tout nombre positif* ε $(\varepsilon>0)$, *il existe un polygone* π *contenu entièrement dans D et tel qu'on ait*

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz-\int_\pi f(z)dz\right|<\varepsilon. \tag{2}$$

Démonstration. Puisque $f(z)$ est uniforme et continue sur le domaine borné et fermé $D+\Gamma$, $f(z)$ y est uniformément continue. Donc, pour le nombre positif $\varepsilon/(9L)$, il existe un nombre positif δ tel qu'on ait

$$|f(z)-f(z')|<\varepsilon/(9L),$$

pour toute paire de points z, z' de $D+\Gamma$, dès que $\rho(z, z')<\delta$. Mais, en vertu du lemme 1, dous pouvons construire un polygone π dans D et partager Γ et π par les points $P_0=P_n$, P_1, P_2, ..., P_{n-1} et $Q_0=Q_n$, Q_1, Q_2, ... Q_{n-1} de sorte que Γ et π se décomposent en des petits arcs Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n et π_1, π_2, ..., π_n resp. qui satisfont aux conditions mentionnéés dans le lemme 1. Or l'arc Γ_i avec le segment (P_i, Q_i), l'arc π_i et le segment (Q_{i-1}, P_{i-1}) se forment un contour simple, soit désigné par η_i, tel qu'on a

$$\begin{aligned}\int_{\eta_i} f(z)dz &= \int_{\eta_i} f(P_i)dz+\int_{\eta_i}\{f(z)-f(P_i)\}dz \\ &= \int_{\eta_i}\{f(z)-f(P_i)\}dz\end{aligned} \tag{3}$$

Mais, si l'on fait la somme $\sum_{i=1}^{n}\int_{\eta_i} f(z)dz$ l'intégrale suivant le segment (L_i, Q_i) se montre deux fois dans la somme, d'ailleurs dans les directions opposées. Donc, ces parties de l'intégrale s'annulent. Par suite, nous avons

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\eta_i} f(z)dz=\int_\Gamma f(z)dz-\int_\pi f(z)dz.$$

On a aussi, d'après (3)

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz-\int_\pi f(z)dz\right|<\sum_{i=1}^{n}\int_{\eta_i}|f(z)-f(P_i)|\,|dz|.$$

D'autre part, pendant qu'on a $z\epsilon\eta_i$, on a, d'apres la propriete 1) du lemme 1, $\rho(z, P_i)<\delta$, et par suite $|f(z)-f(P^i)|<\epsilon/(9L)$. Donc, on a

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz-\int_\pi f(z)dz\right|<\varepsilon/(9L)\cdot\sum_{i=1}^{n}\text{(longueur de }\eta_i).$$

Or, la longueur totale des η_i $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ est égale à la somme des longueurs des arcs Γ_i, π_i et des segments (P_i, Q_i), ceux-ci comptés deux fois. Elle est donc inférieure à $L+6L+2L=9L$ au total, *c. q. f. d.*

---

1) Voir p. ex. E. Goursat: Cours d'Analyse mathematique, 4me ed. 1924, tome II, p. 68, ou L. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I. Elemente der Funktionentheorie., 3tte Auf. 1930, pp. 117-122.

Maintenant, si nous supposons que nous avons établi notre théorème pour le cas ou le contour est formé d'un polygone et où $f(z)$ est holomorphe dans l'intérieur et *sur la frontière du polygone,* il est tout immédiat d'en déduire l'égalité (1). En effect, puisque $\int_{\pi} f(z)dz=0$, on a, d'apres (2),

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| < \varepsilon,$$

et, ε étant arbitraire, on en déduira finalement (1).