16. *Einige Ungleichheiten für die Eilinien und Eiflächen.*

Von Tadahiko KUBOTA, M. J. A.

(Comm. July 12, 1948.)

1 *Bezeichnet man den Flächeninhalt, den Umfang, den Durchmesser irgendeiner Eilinie $\mathfrak{E}$ b. z. w. mit F, L, D und den gemischten Inhalt von der Eilinie $\mathfrak{E}$ sowie von der Eilinie, welche durch Drehung um den Winkel 180° aus $\mathfrak{E}$ erhalten wird, mit M, so besteht die Ungleichheit*

$$\mathrm{DL} \geqq 2\,(\mathrm{F}+\mathrm{M}) \qquad (1)$$

wobei die Gleichheit nur für die Eiflächen konstanter Breite gilt.

Wenn man die Stützgeradenfunktion der Eilinie $\mathfrak{E}$ durch $p\,(\varphi)$ darstellt, dann ist

$$\mathrm{D} = \mathrm{Max}\,[p\,(\varphi) + p\,(\varphi+\pi)]$$

Der gemischte Inhalt der Eilinie $\mathfrak{E}$ und der Eilinie mit der Stützgerandenfunktion $\frac{1}{2}[p(\varphi)+p(\varphi+\pi)]$ ist

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{p(\varphi)\,\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}-p'(\varphi)\,\frac{p'(\varphi)+p'(\varphi+\pi)}{2}\right\}d\varphi$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\{p^2(\varphi)-p'(\varphi)^2\}\,d\varphi+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\{p(\varphi)p(\varphi+\pi)$$
$$-p'(\varphi)p'(\varphi+\pi)\}$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{F}+\frac{1}{2}\mathrm{M}$$

Anderseits gilt

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{p(\varphi)\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}-p'(\varphi)\,\frac{p'(\varphi)+p'(\varphi+\pi)}{2}\right\}d\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(\varphi)\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}\,d\varphi-\left[\frac{1}{2}\,p'(\varphi)\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p''(\varphi)\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}\,d\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{p(\varphi)+p''(\varphi)\}\,\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}\,d\varphi$$
$$\leqq\frac{\mathrm{D}}{4}\int_0^{2\pi}[p(\varphi)+p''(\varphi)]\,d\varphi=\frac{1}{4}\mathrm{DL}$$

Folglich
$$\frac{1}{4}\mathrm{DL}\geqq\frac{1}{2}(\mathrm{F}+\mathrm{M}) \text{ d. h.}$$
$$\frac{\mathrm{DL}}{2}\geqq\mathrm{F}+\mathrm{M},$$

womit der Satz bewiesen ist. Hierbei gilt die Gleichheit nur für den Kurven konstanter Breite.

Nach dem Brunn-Minkowshischen Satz für zwei Eilinien $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, haben wir

$$F\left\{\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2)\right\}^{\frac{1}{2}} \geqq \frac{F(\mathfrak{E}_1)^{\frac{1}{2}}+F(\mathfrak{E}_2)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Für die Eilinien $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ mit Stützgeradenfunktionen $p(\theta)$ und $p(\theta+\pi)$,

$$F(\mathfrak{E}_1)=F(\mathfrak{E}_2)=F$$

woraus sich aus der obigen Ungleichheit ergibt

$$M \geqq F.$$

Folglich

$$DL \geqq 4F,$$

wobei die Gleichheit nur für den Kreis gilt. Dies ist T. Hayashischer Satz.

Aus dem Hayashischen Satz unter Verwendung des Rosenthal-Szaszschen Satzes erhält man

$$D^2\pi \geqq 4F,$$

wobei die Gleichheit nur für den Kreis gilt. Dies ist der Bieberbachsche Satz.

2. Hier möchte ich das räumliche Analogon des Hayashi'schen Satzes beweisen.

Bezeichnet man Volumen, den Oberflächeninhalt und den Durchmesser irgendeiner Eifläche b. z. w mit V, O, D so gilt

$$DO \geqq 6V,$$

wobei die Gleichheit nur für die Kugel gilt.

Nach der isoperimatrischen Eigenshaft der Kugel erhält man bekannterweise

$$O^3 \geqq 36\pi V^2$$

wobei die Gleichheit nur für die Kugel gilt. Nach dem Brunn-Mink owskischen Satz haben wir

$$O\left(\frac{\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \frac{O(\mathfrak{E}_1)^{\frac{1}{2}}+O(\mathfrak{E}_2)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Wenn $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ Stützebenenfunktionen $X(\theta,\varphi)$, $X(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ haben. so erhält man

$$O(\mathfrak{E}_1) = O(\mathfrak{E}_2)$$

und folglich

$$O\left(\frac{\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqq O(\mathfrak{E}_1)^{\frac{1}{2}}$$

d. h.

$$O\left(\frac{\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2}{2}\right) \geqq O(\mathfrak{E}_1)$$

wobei die Gleichheit nur für die Zentraleiflächen $\mathfrak{E}_1$ gilt. Da die Eifläche

$$\frac{\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2}{2}$$

zentral ist, ist sie in einer Kugel mit Durchmesser D vollkommen enthalten. Folglich ist

$$D^2\pi \geqq O\left(\frac{\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2}{2}\right) \geqq O^{(1)} \qquad (1)$$

1) Dies kann man auch unter Verwendung des Cauchyschen Satzes beweisen.

auch gilt
$$O^3 \geqq 36\pi V^2 \tag{2}$$
wobei die Gleichheit nur für die Kugel gilt. Nach (1) und (2) erhält man
$$D^2\pi O^2 \geqq 36\pi V^2,$$
d. h.
$$D^2O^2 \geqq 36V^2,$$
woraus sich ergibt
$$DO \geqq 6V.$$
Hierbei gilt die Gleichheit nur für die Kugel. Aus (3) und (2) ergibt sich die Ungleichheit
$$D^3\pi \geqq 6V$$
wobei die Gleichheit nur für die Kugel gilt. Dies ist der Bieberbachsche Satz.