75. *Sur la solution bornée de l'équation aux dérivées partielles du type elliptique.*

Par Seturo SIMODA et Mitio NAGUMO.

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1951.)

1. **Introduction**:—Envisageons l'équation differentielle

$$(1) \qquad E[u] = \sum_{ij=1}^{m} a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{k=1}^{m} b_k \partial_k u - cu = 0^{1)},$$

où $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $b_k = b_k(x)$ et $c = c(x)$ sont des fonctions continues de point x (de coordonnées $x_1, \ldots, x_m$) dans l'éspace euclidien à m-dimension E^m $(m \geqq 1)$. En outre, supposons qu'on ait $a_{ij} = a_{ji}$, et que la forme $\sum_{ij=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ soit définie positive pour tout $x \in E^m$.

Concernant cette équation, nous traitions tout récemment le problème si elle posséderait aucune solution *régulière et bornée dans* E^m en dehors de la fonction 0 à condition que $c(x) > 0$, le problème ayant été communiqué à nous par des théoristes des probabilités[2]. Ce petit mémoire s'offre pour en énoncer les résultats que nous avons obtenu.

Tout naturellement, même à condition que $c(x) > 0$, l'équation (1) peut posséder des solutions régulières et bornées dans E^m en dehors de la fonction 0, s'il n'y a nullement de connexion entre ses coefficients, spécialement dans le cas $m \geqq 3$; voici un exemple

$$(2) \qquad \Delta u - c(x)u = 0^{3)},$$

où

$$c(x) = \frac{2\varepsilon}{\{2(1+\sum_{i=1}^{m} x_i^2)^{\varepsilon} - 1\}\{1+\sum_{i=1}^{m} x_i^2\}} \times$$

$$\times \left\{ m - \frac{2(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{1+\sum_{i=1}^{m} x_i^2} \right\},$$

ε remplissant l'inégalité $0 < \varepsilon < (m-2)/2$ (m étant supposé $\geqq 3$), donc $c(x) > 0$ pour tout x. L'équation (2) possède en effet une solution *positive*

---

1) Pour brévité, nous écrivons ∂_k pour $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, ∂^2_{ij} pour $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, même dans la suite.

2) Pour référence, voir K. Yosida; *A theorem of Liouville's type for meson equation.* Proc. Japan Acad., 27 (1951), p. 214.

3) Dans le cas $m = 2$, moyennant que $c(x) > 0$, l'équation (2) ne peut posséder rien du tout de solution régulière et bornée dans E^2 en dehors de la fonction 0. Voir en le paragraphe 4. de ce mémoire.

$$u(x) = 2 - \frac{1}{(1+\sum_{i=1}^m x_i^2)^{\varepsilon}},$$

ce qui est *régulière et bornée dans* E^m.

Cependant, si les coefficients de l'équation (1) s'assujettissent à certaine condition convenable, on peut démontrer la non-existence de la solution régulière et bornée dans E^m en dehors de la fonction 0. Brièvement dit, concernant l'équation quelconque à la forme (1), si l'on trouve une fonction $H(x)$ dans E^m, telle que

i) $H(x)$ *est continûment dérivable de deux fois,*

ii) $H(x) > 0$,

iii) $E[H] < 0$,

iv) $\lim_{r\to+\infty} \{ \inf_{|x|=r} H(x)\} = +\infty$[4],

on peut constater, par la comparaison avec ledite $H(x)$, qu'aucune solution régulière et bornée dans E^m de (1) doit y être identiquement nulle.

Dans cette comparaison, le raisonnement de Paraf[5] (le principe de Paraf) est sans doute très efficace. Mais, avec cela, nous voulons expliquer un autre raisonnement, applicable non seulement à l'équation linéaire mais encore à l'équation non-linéaire en jouant le pareil rôle à celui de Paraf.[6]

2. Le théorème fondamental: — Nous allons formuler le raisonnement dit ci-dessus par forme de théorème.

Soient $\mathfrak{D}$ un ensemble ouvert dans E^m et Ω un espace topologique connexe remplissant le premier axiome de dénombrabilité: soit $\Phi(x, u, p, r, \alpha)$ une fonction définie pour tout (x, u, p, r, α) tel que

$$x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathfrak{D}, \quad u \in E^1,$$
$$p = (p_1, \ldots, p_m) \in E^m,$$
$$r = (r_{ij}: \ i, j = 1, 2, \ldots, m) \in E^{m^2},$$

---

4) $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$.

5) Voir les oeuvres célèbres suivantes:

(a) A. Paraf; *Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre.* Ann. Fac. Sc. Toulouse, série 1, VI (1892), pp. 1-75.

(b) E. Picard; *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles* (Paris, 1930), p. 116.

(c) G. Ascoli, P. Burgatti, G. Giraud; *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico* (Firenze, 1936), pp. 60-63.

6) Voir le mémoire de Nagumo, à ≪Kansū Hōteisiki≫, vol. 15 (1939), p. 19, en japonais.

et $\alpha \in \Omega$, et assujettie aux conditions suivantes:

1° *Φ est continue en (x, u, p, r, α),*

2° *Φ est continûment dérivable par rapport à r,*

3° *désignant par Φ_{ij} la dérivée $\dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{ij}}$, la matrice $(\Phi_{ij}: i, j = 1, 2, \ldots, m)$ est symétrique et définie positive pour tout (x, u, p, r, α).*

Ensuite, soient $w(x, \alpha)$ et $v(x, \alpha)$ des fonctions *continues en* (x, α) définies dans $\mathfrak{D} \times \Omega$ et remplissant les conditions suivantes:

4° *w, v tous les deux sont continûment dérivables de deux fois par raport à x dans $\mathfrak{D}$,*

5° *il subsiste que pour tout $(x, \alpha) \in \mathfrak{D} \times \Omega$*

$$\Phi(x, w(x, \alpha), \partial_x w(x, \alpha), \partial_x^2 w(x, \alpha), \alpha) < \\ < \Phi(x, v(x, \alpha), \partial_x v(x, \alpha), \partial_x^2 v(x, \alpha), \alpha),$$

6° *pour n'importe quelle suite $\{(x^{(n)}, \alpha^{(n)}): n = 1, 2, \ldots\}$ dans $\mathfrak{D} \times \Omega$ telle que la suite $\{x^{(n)}\}$ n'a nullement de point d'accumulation dans $\mathfrak{D}$, on a toujours*

$$\varliminf_{n \to \infty} \{w(x^{(n)}, \alpha^{(n)}) - v(x^{(n)}, \alpha^{(n)})\} > 0,$$

7° *il existe au moins un $\alpha \in \Omega$ tel que.*

$$w(x, \alpha) > v(x, \alpha) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{D}.$$

Alors, *cette inégalité reste conservée pour tout* $(x, \alpha) \in \mathfrak{D} \times \Omega$.

Preuve: nous commençons par supposer que

$$(*) \qquad w(x, \alpha) \leqq v(x, \alpha) \quad \text{pour quelque} \quad (x, \alpha) \in \mathfrak{D} \times \Omega.$$

Posons

$$A = \{\alpha \in \Omega : \ w(x, \alpha) > v(x, \alpha) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{D}\}$$
$$B = \{\alpha \in \Omega : \ w(x, \alpha) < v(x, \alpha) \quad \text{pour quelque } x \in \mathfrak{D}\};$$

A n'est ni vide ni identique à Ω par les hypothèses 7° et $(*)$.

Or, B est clairement ouvert; de plus, A est aussi ouvert; c'est-à-dire, si $\alpha_0 \in A$, il existe un voisinage V de α_0 tel que

$$w(x, \alpha) > v(x, \alpha) \quad \text{pour tout} \quad (x, \alpha) \in \mathfrak{D} \times V.$$

Nous allons le montrer comme il suit. Supposé qu'il ne jamais exister de voisinage tel qu'en nous venons de dire, il doit exister une suite $\{(x^{(n)}, \alpha^{(n)})\}$ telle que $x^{(n)} \in \mathfrak{D}$, $\alpha^{(n)} \to \alpha_0$ et $w(x^{(n)}, \alpha^{(n)}) \leqq v(x^{(n)}, \alpha^{(n)})$; la suite $\{x^{(n)}\}$ n'a pas de point d'accumulation dans $\mathfrak{D}$ d'après la continuité des fonctions w et v dans $\mathfrak{D} \times \Omega$ et $\alpha_0 \in A$. On a donc d'une part

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\{w(x^{(n)}, \alpha^{(n)})-v(x^{(n)}, \alpha^{(n)})\} \leqq 0$$

et en même temps

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\{w(x^{(n)}, \alpha^{(n)})-v(x^{(n)}, \alpha^{(n)})\} > 0$$

vu la condition 6°, ce qui se contredisent, et en conséquence B est ouvert.

Maintenant, si $B \neq 0$, la connexité de Ω entraîne que $\Omega - A \cup B \neq 0$; c'est véritable même si $B = 0$ vu (*); cela signifie que, sous l'hypothèse (*), il doit exister au moins un $\tilde{\alpha} \in \Omega$ tel que

$$w(x, \tilde{\alpha}) \geqq v(x, \tilde{\alpha}) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{D}$$

et en même temps

$$w(x, \tilde{\alpha}) = v(x, \tilde{\alpha}) \quad \text{pour quelque} \quad x \in \mathfrak{D}.$$

Prenons maintenant que $w(\xi, \tilde{\alpha}) = v(\xi, \tilde{\alpha})$, $\xi \in \mathfrak{D}$; alors il en vient que la fonction $w(x, \tilde{\alpha})-v(x, \alpha)$ atteint le minimum pour $x = \xi$ ($\tilde{\alpha}$ étant fixe); donc on a

$$\partial_i w(\xi, \tilde{\alpha}) = \partial_i v(\xi, \tilde{\alpha}) \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

et la matrice

$$(\partial_{ij}^2 w(\xi, \tilde{\alpha}) - \partial_{ij}^2 v(\xi, \tilde{\alpha}): \quad i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

est semi-définie positive.

Néanmoins, la formule des accroissements finis donne

$$\begin{aligned} \Delta &= \Phi(\xi, w(\xi, \tilde{\alpha}), \partial_x w(\xi, \tilde{\alpha}), \partial_x^2 w(\xi, \tilde{\alpha}), \tilde{\alpha}) - \\ &\qquad\qquad - \Phi(\xi, v(\xi, \tilde{\alpha}), \partial_x v(\xi, \tilde{\alpha}), \partial_x^2 v(\xi, \tilde{\alpha}), \tilde{\alpha}) \\ &= \textstyle\sum_{ij=1}^m \Phi_{ij}(\xi, w(\xi, \tilde{\alpha}), \partial_x w(\xi, \tilde{\alpha}), \tilde{r}, \tilde{\alpha}) \times \\ &\qquad\qquad \times \{\partial_{ij}^2 w(\xi, \tilde{\alpha}) - \partial_{ij}^2 v(\xi, \tilde{\alpha})\}, \end{aligned}$$

$\tilde{r}$ étant un point intermédiaire aux deux points $\partial_x^2 w(\xi, \tilde{\alpha})$ et $\partial_x^2 v(\xi, \tilde{\alpha})$ dans E^{m^2}; le second membre précédent est bien la trace du produit de deux matrices symétriques, dont l'une est définie positive et l'autre semi-définie positive, donc $\Delta \geqq 0$[7], malgré que $\Delta < 0$ d'après l'hypothèse 5°. C.q.f.d.

3. La solution bornée de l'équation (1): — Nous allons commencer par un théorème un peu général, dont divers résultats particuliers seront obtenus.

7) Cela souvent s'appelait le lemme de Montard.

Théorème : *Admettons qu'il existe une fonction* $H(x)$ *jouissant des propriétés* i) ii) iii) *et* iv) *données dans* §1. *Alors il n'y a rien de borné parmi les solutions regulières dans* E^m *de l'équation* (1) *en dehors de la fonction* 0.

Preuve : Soit $u(x)$ une solution régulière et bornée dans E^m de (1), et soit M la borne supérieure de $|u(x)|$, x parcourant E^m.

Posons

$$\Phi(x, u, p, r, \alpha) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)r_{ij} + \sum_{k=1}^m b_k(x)p_k - c(x)u$$

$$w(x, \alpha) = \alpha H(x) \qquad (0 < \alpha < +\infty),$$

Φ étant donc affranchie de α. La fonction Φ tellement définie évidemment remplit les conditions 1°, 2°, 3° du théorème fondamental.

Prenant pour $v(x, \alpha)$ la solution $u(x)$ de (1) même (et $-u(x)$), on a aisément

$$\Phi(x, w, \partial_x w, \partial_x^2 w, \alpha) = \alpha E[H] < 0$$

$$\Phi(x, v, \partial_x v, \partial_x^2 v, \alpha) = 0 ;$$

donc les conditions 4°, 5° et 6° du théorème précédent sont remplies.

Finalement, si $\alpha > M / \inf_{x \in E^m} H(x)$, on a

$$v(x, \alpha) < w(x, \alpha) \quad \text{pour tout} \quad x \in E^m ;$$

donc la condition 7° est aussi sûrement remplie.

Par conséquent, en vertu du théorème fondamental, il vient tout de suite que

$$|u(x)| < w(x, \alpha) = \alpha H(x) \quad \text{pour tout} \quad \alpha > 0 ;$$

donc $u(x)$ doit être identiquement nulle dans E^m, c.q.f.d.

Comme un corollaire de ce théorème, nous traitons ici seulement un des divers cas particuliers.

Corollaire : Admettons que les coefficients de l'équation (1) remplissent les conditions suivantes :

(i) $c(x) > 0$ *pour tout* $x \in E^m$,

(ii) $$\lim_{r \to +\infty} \left\{ r^{-2} \sup_{|x|=r} \frac{\sum_{i=1}^m a_{ii}(x) + r\sqrt{\sum_{k=1}^m b_k(x)^2}}{c(x)} \right\} < \frac{1}{2} .$$

Alors *il n'y a rien de borné parmi les sulutions régulières dans* E^m *de l'équation* (1) *en dehors de la fonction* 0.

Preuve : Posons pour abréger

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^m a_{ii}(x) , \quad \phi(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k(x)^2} .$$

D'après l'hypothèse (ii), il doit exister un $R>0$ tel que $r\geqq R$ entraîne

$$r^{-2}\sup_{|x|=r}\frac{\sigma(x)+r\phi(x)}{c(x)}<\frac{1}{2};$$

prenons un $A>0$ tel que

$$A>\sup_{|x|\leqq R}\frac{\sigma(x)+|x|\phi(x)}{c(x)};$$

ensuite posons

$$H(x)=A+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}x_i^2,$$

dont les conditions i), ii), iii) et iv) du théorème (de ce paragraphe) sont remplies. Donc la conclusion voulue est claire.

4. La solution bornée de l'équation (2) dans le cas $m=2$:—Nous voulons traiter en dernier lieu le problème proposé à l'introduction pour l'équation (2), à condition que $c(x)$ est continue et *non-négative pour tout x,* et en outre qu'elle est *positive sur au moins un point $x_0\in E^m$; m* étant supposé $=2$.

Conclusion: Sous les hypothèses données plus haut, *l'équation* (2) *ne possède nullement de solution régulière et bornée dans E en dehors de la fonction* 0.

Preuve: On peut, par l'hypothèse, prendre un nombre $\delta>0$ tel que $|x-x_0|\leqq\delta$[8] entraîne $c(x)>0$ moyennant la continuité de $c(x)$; et posons

$$c_0=\inf_{|x-x_0|\leqq\delta}c(x).$$

Or, il s'agit de chercher une fonction $H(x)$, jouissant des propriétés i), ii) et iv) du théorème au paragraphe précédent, et en outre de façon qu'on ait

$$\begin{cases}\Delta H<0 & \text{pour } |x-x_0|\geqq\delta\\ \Delta H-c_0H(x)<0 & \text{pour } |x-x_0|\leqq\delta.\end{cases}$$

À cause de cela, nous allons définir $H(x)$ comme suit:

$$H(x)=K+\begin{cases}\log|x-x_0|-(4\delta^{-2}|x-x_0|^2+1)^{-1} & \text{pour } |x-x_0|\geqq\delta\\ -\frac{189}{500}\delta^{-4}|x-x_0|^4+\frac{177}{125}\delta^{-2}|x-x_0|^2+\log\delta-\frac{53}{100} & \\ & \text{pour } |x-x_0|\leqq\delta,\end{cases}$$

K étant déterminé de façon que $H(x)$ soit positive pour tout x, et que $\Delta H-c_0H$ soit négative pour $|x-x_0|\leqq\delta$.

8) $|x-x_0|$ est la distance euclidienne entre deux points x, x_0.