87. Über die Grundlagen der Mathematik.

(Zweite Mitteilung.)

Von Zyoiti SUETUNA, M.J.A.

(Comm. Oct. 12, 1951.)

In der ersten Mitteilung* habe ich die Meinung dargelegt: *eine mathematische Existenz katexochen*, d.h. ein mathematischer Gegenstand von anschaulich-inhaltlicher Bedeutung soll mittels *der Totalität von den natürlichen Zahlen und des linearen Kontinuums* durch unsere durch Tat bewirkte Anschauung begriffen werden. Der Totalität von den natürlichen Zahlen liegt unser wiederholtes Addieren von 1 zugrunde. Durch die durch diese Taten bewirkte Anschauung wird die Totalität von den natürlichen Zahlen in natürlicher Anordnung als ein mathematischer Gegenstand geformt und erfasst. Der Begriff der (unendlichen) Folge und Reihe wird durch die Erfassung der Totalität von den natürlichen Zahlen erst recht uns klar und damit wird die Arithmetisierung des Kontinuums möglich. Dem linearen Kontinuum liegt unsere Bewegung zugrunde. Die Stetigkeit muss zunächst erlebt werden, um adäquat begriffen zu werden.

In der *Cantor*schen Definition der Menge: eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen, liegt die Hauptschwierigkeit darin, wie man eine Zusammenfassung zu einem Ganzen versteht. *Um unendlich viele Elemente als eine mathematische Existenz zu betrachten, muss zunächst unsere diese Totalität bewerkstelligende Tat uns klar sein und somit muss diese Totalität durch unsere durch diese Tat bewirkte Anschauung als mathematischer Gegenstand begreifbar sein.* Ich möchte nur eine auf solche Weise erfasste Totalität eine *Menge* nennen. Dass wir in die Mathematik eine wesentlich nene Menge einführen, besagt, dass wir damit ein neues Axiom aufstellen, wenn man den Anfang der formallogischen Deduktion Axiom nennt. Falls wir andere Gesamtheiten von Elementen als eine hiermit definierte Menge (als Mittel in unserer Mathematik) zu betrachten haben, dann sollen wir solche im gegebenen Falle konkret einzeln behandeln, um wirklich die Mathematik von anschaulich-inhaltlicher Bedeutung zu konstruieren. Somit lässt sich der Begriff der oberen Grenze einer beschränkten Funktion zum Beispiel genau so einführen, wie bei einer beschränkten Menge.

---

* Z. Suetuna: Über die Grundlagen der Mathematik; J. Math. Soc. Japan, **3** (1951) (Takagi Commemoration Number), 59–68.

Wie ich schon in der ersten Mitteilung erörterte, ist die sogenannte *Freie Wahlfolge* deshalb kein richtiger mathematischer Gegenstand, weil eine unendliche Folge durch unser finites Tun nie erfasst werden kann. Wählen wir zunächst beliebig eine Zahl a_1, darauf auch beliebig eine zweite a_2, dritte a_3 usf., so entsteht natürlich die Folge

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots,$$

was jedoch keine unendliche Folge von mathematischem Sinne ist. Nur wenn a_n für alle natürlichen Zahlen n, d.h. für die beliebig-allgemeine (konkret-allgemeine) natürliche Zahl n bestimmt ist, haben wir eine (unendliche) Folge $\{a_n\}$ in wohldefiniertem Sinne. Die Totalität von solchen a_n für alle n bildet eine Menge in unserem Sinne. Dass eine Menge tatsächlich als *seiend* nicht nur als *werdend* gedacht wird, ist deshalb sehr wichtig, weil wir dann erst recht im Stande sind, dabei den Satz des ausgeschlossenen Dritten sinnvoll anzuwenden.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch eine Bemerkung über das *Auswahlprinzip* hinzufügen. Die Behauptung: ist M eine Menge, deren Elemente sämtlich mindestens je ein Element enthalten und überdies paarweise elementefremd sind, so existiert mindestens eine sogenannte Auswahlmenge, die mit jedem Elemente M_α von M gerade ein einziges Element gemein hat, aber keine anderen Elemente besitzt, ist im allgemeinen nicht richtig, wenn das Wort Menge nicht in unserem strikten Sinne verstanden wird. Wir wissen ja gar nicht, wieso die Elemente, jedes von denen aus irgendeiner Menge M_α gewählt ist, eine mathematische Totalität bilden. Nur wenn wir M als eine Menge von Mengen M_α in unserem Sinne betrachten können und deshalb von dem beliebig-allgemeinen M_α sinnvoll sprechen dürfen, bilden die Elemente, deren Repräsentant aus solchem M_α gewählt ist, tatsächlich eine Menge in unserem Sinne; und somit gilt nun das Auswahlprinzip.

Wenn wir a_n für *alle* natürlichen Zahlen n angeben können, dann ist a_n eine *zahlentheoretische Funktion* von n. Aber nun denken wir uns ein Intervall, etwa

$$a \leqq x \leqq b \qquad (a < b).$$

Alle diesem Intervall angehörigen Zahlen bilden natürlich eine Menge in unserem Sinne. Wenn der korrespondierende Wert von y dann eindeutig bestimmt wird, falls irgendein, d.h. beliebig-bestimmter Wert von x in diesem Intervall angegeben ist, so soll y nun nicht eine Funktion sondern eine *Pseudofunktion* von x

genannt werden. Wenn aber der korrespondierende Wert von y für *alle* Werte von x in diesem Intervall eindeutig bestimmt wird, dann erst soll y eine *Funktion* von x heissen. Eine Pseudofunktion $y=f(x)$ soll in einer Stelle $x=\xi$ *stetig* heissen, wenn für eine beliebig-bestimmte gegen ξ konvergierende (dem Intervall angehörende) Folge* $\{x_n\}$

$$f(x_n) \to f(\xi) \qquad \text{für} \quad n \to \infty$$

gilt, d.h. wenn es für ein beliebig-bestimmtes positives ε ein ganzes positives n_0 derart gibt, dass

$$|f(x_n)-f(\xi)| < \varepsilon \quad \text{für jedes ganze } n \geqq n_0$$

ist. Wenn eine Pseudofunktion y in einer beliebig-bestimmten Stelle von x stetig ist, so lässt sie sich überall so genau approximieren, wie man nur wünschen kann. (Man erinnere sich hierbei an den *Weierstrass*schen Satz, dass sich jede im abgeschlossenen Intervall stetige Funktion dort durch eine gleichmässig konvergente Reihe von Polynomen darstellen lässt.) Folglich sieht man ein:

Wenn eine Pseudofunktion in einer beliebig-bestimmten Stelle des Intervalls stetig ist, so ist sie eine Funktion in diesem Intervall, und zwar eine stetige.

Natürlich heisst eine Funktion $f(x)$ in $x=\xi$ stetig, wenn es für ein beliebig-bestimmtes positives ε ein positives δ derart gibt, dass

$$|f(x)-f(\xi)| < \varepsilon$$

für jedes dem Intervall angehörige x mit $|x-\xi|<\delta$ gilt. $f(x)$ ist somit stetig im Intervall, wenn sie in jeder Stelle des Intervalls stetig ist.

Bezeichnen wir in der Mathematik den Anfang der formallogischen Deduktion als Axiom, so ist die oben erwähnte Tatsache sicherlich ein Axiom, weil man bloss aus einem beliebig-bestimmten Elemente (einer unendlichen Menge) über alle Elemente formallogisch nichts aussagen kann. Gemäss dem Tatbestand, dass wir das Prinzip aus einer beliebig-bestimmten natürlichen Zahl über alle natürlichen Zahlen zu schliessen als Axiom der vollständigen Induktion hervorheben, möchte ich dies Axiom das *Axiom der stetigen Funktion* nennen.

Auf Grund dieser Begriffe von Zahlen und Funktionen können wir die Grundsätze der gewöhnlichen klassischen Mathematik an-

* Von allen gegen ξ konvergierenden Folgen soll keine Rede sein.

schaulich-inhaltlich darlegen.* Eine Funktion von anschaulichem Inhalt mag eigentlich, wie die Intuitionisten behaupten, eine stetige sein. Ich glaube doch, dass wir sicherlich erlaubt sind, den Begriff der Funktion in der Mathematik von anschaulich-inhaltlicher Bedeutung so weit wie oben erklärt zu nehmen. Somit können wir zum Beispiel den Begriff der *Ableitung* (als Funktion) allgemein einführen. Eine (stetige) Funktion $y=f(x)$ in einem Intervall heisst in einer Stelle $x=\xi$ differentiierbar, wenn

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \qquad \text{für} \quad x \to \xi$$

einen Limes besitzt. Weil $y=f(x)$ für alle x im Intervall definiert ist, muss die Funktion entweder in allen Stellen des Intervalls differentiierbar sein oder es gibt mindestens eine Stelle des Intervalls, wo sie nicht differentiierbar ist. Wenn also eine Funktion in einer beliebig-bestimmten Stelle des Intervalls differentiierbar ist, so muss sie in allen Stellen des Intervalls differentiierbar sein. Damit ergibt sich der Begriff der Ableitung einer Funktion, was gewiss nicht immer stetig ist.

Tokyo, den 25. Sept. 1951.