134. Über die imaginär-quadratischen Zahlkörper der Klassenzahl Eins oder Zwei.

Von Kanesiroo Iseki.

(Comm. by Z. Suetuna, M.J.A., Dec. 12, 1951.)

Es wurde von Herren Heilbronn und Linfoot 1934 bewiesen[1], dass es höchstens eine Fundamentaldiskriminante $<-10^4$ mit der Klassenzahl Eins gibt. Ich habe mich darum bemüht, das entsprechende Problem für den Fall der Klassenzahl $\leqq 2$ zu lösen, und das folgende Resultat gewonnen:

Es gibt höchstens eine einzige Fundamentaldiskriminante $<-9\times 10^4$ *mit der Klassenzahl* $\leqq 2$.

Meine Methode gestattet, für jede vorgegebene natürliche Zahl n eine positive Zahl $N(n)$ effektiv so auszuberechnen, dass es höchstens eine Fundamentaldiskriminante $<-N(n)$ mit der Klassenzahl $\leqq n$ gibt; jedoch liegt mein Hauptinteresse im nächsteinfachsten Fall $n=2$.

Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, dass Herr Tatuzawa[3] ein wenig später als die gegenwärtige Untersuchung einige engst mit dem hierigen verbundene Resultate nach seiner eigenen Methode erhielt und vor allem bewies, dass man $N(n)=2100\,n^2\log^2(13\,n)$ nehmen darf.

Im folgenden werde ich den Abriss[3] meiner Beweismethode angeben. Es seien $-\Delta$ und $-\Delta_0$ zwei Fundamentaldiskriminanten mit der Nebenbedingung $\Delta>\Delta_0>9\times 10^4$. Wir bezeichnen mit $h=h(-\Delta)$ und $h_0=h(-\Delta_0)$ die entsprechenden Klassenzahlen. Nun nehmen wir $h\leqq 2$ und $h_0\leqq 2$ an, und daraus soll ein Widerspruch abgeleitet werden. Das wird sich aus den folgenden zwei Lemmata ergeben:

Lemma 1: *Es sei* $\chi_0(n)=\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)$ *das Kroneckersche Symbol. Dann ist für die entsprechende Dirichletsche L-Funktion*

$$L\left(1-\frac{5}{\sqrt{\Delta_0}},\ \chi_0\right)<0<L\left(1-\frac{h_0}{\sqrt{\Delta_0}},\ \chi_0\right).$$

1) H. Heilbronn und E. H. Linfoot: On the imaginary quadratic corpora of class-number one; Quart. Journ. Math. (Oxford Series), Bd. **V** (1934), 293–301.

2) On a theorem of Siegel", was im „Japanese Journal of Mathematics" zu erscheinen ist.

3) Der ausführliche Beweis wird demnächst im „Japanese Journal of Mathematics" (Jahrgang 1952) erscheinen.

Lemma 2: *Es sei ferner* $\chi(n)=\left(\frac{-\varDelta}{n}\right)$ *und man setze für* $\sigma=\Re s>0$, $s\neq 1$

$$F(s)=\zeta(s)L(s,\chi_0)L(s,\chi)L(s,\chi_0\chi),$$

$$\rho=L(1,\chi_0)L(1,\chi)L(1,\chi_0\chi).$$

Dann ist für $\frac{49}{50}<\tau<1$

$$F(\tau)>\frac{\pi^2}{6}-0{,}03-\frac{\rho}{1-\tau}e^{(1-\tau)K},$$

wo
$$K=K(\varDelta)=\frac{5}{3}(2\log\varDelta+3\log\log\varDelta+10{,}6)$$

gesetzt wird.

(Das ist eine präzis ausgearbeitete Form für Herrn Estermanns Lemma bei seinem eleganten Beweis[4] des Siegelschen Satzes.)

Aus Lemma 1 folgt sogleich, dass $L(s,\chi_0)$ eine Nullstelle α im Intervall

$$1-\frac{5}{\sqrt{\varDelta_0}}<\alpha<1-\frac{h_0}{\sqrt{\varDelta_0}}$$

besitzt; setzt man nun $\tau=\alpha$ in Lemma 2, so ergibt sich

$$\frac{\rho}{1-\alpha}e^{(1-\alpha)K}>\frac{\pi^2}{6}-0{,}03,$$

und hieraus folgt mühelos ein Widerspruch, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nachtrag. Über die konkreten Werte von $\varDelta$ mit $h(-\varDelta)=2$ wurde vom Verfasser[5] gezeigt, dass es genau 18 solche $\varDelta$ unterhalb 6000 gibt, nämlich

15, 20, 24, 35, 40, 51, 52, 88, 91, 115, 123, 148,

187, 232, 235, 267, 403, 427.

4) T. Estermann: On Dirichlet's L-functions; Journ. London Math. Soc., Bd. **23** (1948), 275-279.

5) Die ausführliche Darlegung wird binnen kurzen im „Natural Science Report of the Ochanomizu University" (Jahrgang 1952) erscheinen.