1. *Einige kanonische konforme Abbildungen vielfach zusammenhängender Gebiete*

Von Yûsaku KOMATU
Mathematisches Seminar, Institut für Technologie zu Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Jan. 12, 1953)

Gegeben sei ein Gebiet D von endlichem Zusammenhang auf der z-Ebene, welches den unendlichfernen Punkt im Innern enthält. $\mathfrak{S}=\{\chi(z)\}$ bezeichne die Familie derjenigen in D schlichten Funktionen $\chi(z)$, welche um $z=\infty$ in der Form

$$\chi(z)=z+O(1) \qquad (z\to\infty)$$

normiert werden und ferner einen vorgegebenen Punkt z_0 von D in den Ursprung überführen.

Da die isolierten Randpunkte bei jeder Abbildung hebbar sind, kann man annehmen, daß der Rand C des Urgebiets D aus lauter Kontinuen besteht. Man kann sogar ohne Beschränkung der Allgemeinheit, nämlich nötigenfalls mittels einer Hilfsabbildung, immerhin annehmen, daß der Rand C aus lauter Jordankurven besteht. Der ganze Rand C werde nun in zwei einander komplementäre Teile Γ' und Γ'' zerlegt. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, an unsre frühere Abhandlung[1] anschließend, die Existenzsätze einiger kanonischer Abbildungen nebst den respektiven Unitätsbehauptungen bezüglich der so gestellten Randzuordnung zu beweisen, deren erster[2] lautet:

Satz 1. *Es gibt eine einzige Funktion $f(z)\in\mathfrak{S}$, die den Teil Γ' und den Teil Γ'' in den senkrechten bzw. horizontalen Randteil überführt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}_1$ diejenige Teilfamilie von $\mathfrak{S}$, welche aus den Funktionen besteht, die den Teil Γ' in den senkrechten Randteil überführen. Sie ist nicht leer; in der Tat gibt es bekanntlich eine (und nur eine) Funktion, welche das Gebiet D auf ein lauter längs der zur imaginären Achse parallelen Schlitze aufgeschlitztes Gebiet abbildet. Wir betrachten nun ein Variationsproblem

$$\Re a[\phi]=\mathrm{Max}, \qquad \phi\in\mathfrak{S}_1,$$

worin das Funktional $a[\phi]$ den Koeffizienten von $1/z$ der Entwicklung

---

1) Y. Komatu und M. Ozawa: Conformal mapping of multiply connected domains, I; II. Kōdai Math. Sem. Rep. (1951), 81-95; (1952), 39-44.

2) Den speziellen Fall, wo der Teil Γ' (und also auch der Teil Γ'') aus einigen vollen Randkomponenten besteht, haben wir in der in[1] zitierten Abhandlung erledigt.

von $\phi(z)$ um $z=\infty$, d. h. das mit dem entgegengesetzten Zeichen *versehene Residuum von $\phi(z)$ an ∞ bedeutet. Da die betreffende* Familie $\mathfrak{S}_1$ offenbar sowohl normal als auch kompakt ist, so gibt es sicher eine extremale Funktion $f \in \mathfrak{S}_1$ für dieses Variationsproblem. Wir bemerken zuerst, daß das Bildgebiet $f(D)$ nicht mit dem zur imaginären Achse parallelen Schlitzgebiet übereinstimmen kann. In der Tat, sieht man leicht ein, daß die Familie $\mathfrak{S}_1$ außer der die soeben genannte Parallelschlitzabbildung vermittelnden Funktion sicher eine andere Funktion enthält, für welche das betreffende Funktional bekanntlich größer ist als für jene Funktion.

Wir sollen nun zeigen, daß diese extremale Funktion $f(z)$ gerade die gesuchte Abbildung vermittelt. Wäre es nicht der Fall, dann gäbe es einen zusammenhängenden Teil λ'' des Randteils $f(\Gamma'')$, welcher nicht auf einer horizontalen Gerade enthalten würde und ferner gemäß der eben Gesagten angenommen werden könnte, mit $f(\Gamma')$ keinen Punkt gemein zu haben. Wir bezeichnen den Randteil $f(\Gamma')$ insbesondere mit $[f(\Gamma')]$, indem wir ihn als eine auf der w-Ebene gelegene Punktmenge ansehen. Das das Bildgebiet $f(D)$ enthaltende Gebiet auf der w-Ebene, welches durch lauter $[f(\Gamma')] + \lambda''$ begrenzt ist, werde schlicht abgebildet, derart daß der unendlichferne Punkt sowie der Ursprung beide dabei invariant bleiben und der Randteil $[f(\Gamma')]$ in die senkrechten Schlitze übergeführt wird, während der Teil λ'' in den horizontalen Schlitz übergeführt wird. Die diese Abbildung vermittelnde Funktion sei sogar normiert in der Weise[3)]

$$g(w)=w+\gamma_0+\frac{a[g]}{w}+\cdots.$$

Die Ränderzuordnung berücksichtigend, erhalten wir mittels der Greenschen Formel die Abschätzung[4)]

$$\iint |g'(w)-1|^2 d\omega_w \leqq 2\pi \Re a[g] \qquad (w=u+iv,\ d\omega_w=dudv);$$

hierbei ist das links stehende Integral über das ganze durch $[f(\Gamma')] + \lambda''$ begrenzte Gebiet zu erstrecken. Da aus der Annahme die Differenz $g(w)-w$ nicht auf eine Konstante reduzieren kann, so bekommen wir die Ungleichung $\Re a[g]>0$. Für die zusammengesetzte Funktion $g(f) \in \mathfrak{S}_1$ wird dann

$$\Re a[g(f)]=\Re(a[g]+a[f])>\Re a[f],$$

im Gegensatz zur maximalen Forderung von $\Re a[f]$.

Um weiter die Unität der gesuchten Abbildung zu bestätigen,

---

3) Die Möglichkeit solcher Abbildung haben wir in der in[1)] zitierten Abhandlung bewiesen.

4) In bezug auf die Einzelheiten vgl. loc. cit.[1)]

nehmen wir an, daß eine Funktion f^* auch die Abbildung mit den genannten Eigenschaften vermittelt. Dann erhalten wir unter Berücksichtigung der Ränderzuordnung bei den betreffenden Abbildungen wieder mittels der Greenschen Formel die Gleichheit

$$\iint |f^{*\prime}-f'|^2 d\omega_z = 2\pi\Re(a[f^*]-a[f]) \qquad (z=x+iy,\ d\omega_z=dxdy).$$

Der maximale Charakter von $\Re a[f]$ nebst der Normierungsbedingung an z_0 zieht also die Identität $f^*\equiv f$ nach sich.

Nebenbei bemerken wir, daß der Beweis des Satzes ebenso ausgeführt werden kann, indem man diejenige Teilfamilie $\mathfrak{S}_2$ von $\mathfrak{S}$ betrachtet, welche aus den Funktionen ψ besteht, die den Teil Γ'' in den horizontalen Randteil überführt, und demgemäß das Variationsproblem

$$\Re a[\psi]=\text{Min}, \qquad \psi\in\mathfrak{S}_2,$$

in Betracht zieht.

Wir sollen nun einen weiteren analogen Abbildungssatz aussprechen.

Satz 2. *Es gibt eine einzige Funktion $f(z)\in\mathfrak{S}$, die den Teil Γ' und den Teil Γ'' in den gegen den Ursprung gerichteten radialen bzw. in den um den Ursprung gezeichneten kreisbogenförmigen Randteil überführt.*

Beweis. Wir betrachten diesmal diejenige Teilfamilie $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{S}$, welche aus den Funktionen besteht, die den Teil Γ' in den radialen Teil überführen, und wir formulieren dann das Variationsproblem

$$|\phi'(z_0)|=\text{Max}, \qquad \phi\in\mathfrak{T}_1.$$

Der Beweis des Satzes läßt sich dann ganz analog ausführen wie im Satz 1, indem die folgende Extremalität berücksichtigt werden: Unter allen Funktionen, welche ein gegebenes den Punkt ∞ und einen bestimmten Punkt z_0 enthaltendes Gebiet derart abbilden, daß jedes Linienelement an ∞ invariant bleibt, der Punkt z_0 in den Punkt 0 übergeführt wird und ferner der Gesamtrand mit Ausnahme von einer ausgezeichneten Randkomponente in die gegen den Ursprung gerichteten radialen Schlitze übergeführt wird, besitzt diejenige Funktion, und nur diese, den maximalen Absolutbetrag der Ableitung an z_0, welche die ausgenommene Randkomponente in einen Kreisbogen um den Ursprung überführt[5].

Hierbei gilt auch eine analoge Bemerkung wie die früher an den Beweis des Satzes 1 anschließend erwähnte Bemerkung.

Um weiter einen analogen Abbildungssatz zu erwähnen, lassen wir von nun an die Normierungsbedingung an z_0 weg, und statt dessen stellen wir eine neue Bedingung, daß das Bildgebiet keinen

5) Vgl. loc. cit.[1]

im Einheitskreis gelegenen Punkt enthält und ferner seine innerste Randkomponente die Einheitskreisperipherie enthält. Die so entstehende Familie der Abbildungsfunktionen heiße $\mathfrak{U}$.

Satz 3. *Es gibt eine einzige Funktion* $f(z) \in \mathfrak{U}$, *die den Teil* Γ' *und den Teil* Γ'' *in den gegen den Ursprung gerichteten radialen bzw. in den um den Ursprung gezeichneten kreisbogenförmigen Randteil überführt, derart daß eine ausgezeichnete Randkomponente des Urgebiets D der die Einheitskreisperipherie enthaltenden Komponente des Bildgebiets entspricht.*

Beweis. Mittels einer einfachen Hilfsabbildung läßt sich das Urgebiet ersichtlich durch eine Funktion von $\mathfrak{U}$ in ein Gebiet so abbilden, daß der aus dem Γ''-Teil der ausgezeichneten Randkomponente stammende Randteil gerade mit der Einheitskreisperipherie übereinstimmt. Der Beweisgang des Satzes fährt sodann ganz analog wie im Satz 2.

Vielmehr wird es aber vorgezogen, den Beweis des Satzes selbst vollständig auf den Satz 2 zu reduzieren, indem man das Urgebiet, dessen Γ''-Teil der innersten Randkomponente vornherein auf der Einheitskreisperipherie liegt—so kann man annehmen—, in bezug auf den Γ''-Teil der Einheitskreisperipherie spiegelt. Das so entstandene Doppelgebiet werde nun nach dem Satz 2 auf das bezüglich der Einheitskreisperipherie spiegelbildlich symmetrische Gebiet mit geeigneter Randzuordnung derart abgebildet, daß jedes Linienelement an ∞ und der Punkt 0 beide invariant bleiben. Dadurch ist dann zugleich die gesuchte Abbildung des Urgebiets vermittelt.

Wir haben bisher nur der Einfachheit halber ein den unendlichfernen Punkt enthaltendes Urgebiet betrachtet. Wenn dagegen an einem vorgegebenen Punkt z_∞ $(\neq\infty)$ eines beliebigen Urgebiets die Normierungsbedingung

$$\chi(z)=\frac{1}{z-z_\infty}+O(1) \qquad (z\to z_\infty)$$

gestellt ist, dann genügt es, nur eine Hilfsabbildung zusammenzusetzen, die den Punkt z_∞ in ∞ überführt.

Wir können ferner weitere analoge Abbildungssätze auch im Falle der Bildgebiete von verschiedenen kanonischen Gestalten formulieren, welche irgendwelche Extremaleigenschaften zulassen[6]. Der oben erwähnte Beweisgang wird sodann auch mit Erfolg angewandt werden.

Zum Schluß sollen wir darauf aufmerksam machen, daß die eben bewiesenen Abbildungssätze für die gemischte Randwertaufgabe der Potentialtheorie nützlich sind, wobei längs eines Randteils sowie

---

6) Z. B. solche, die durch geeignete Verallgemeinerung der in[1] betrachteten kanonnishen Gebiete entstehen.

längs des übrigen Randteils die Funktionenwerte selbst bzw. die Werte der Normalableitung angeordnet sind. Die Erörterung darüber wird in einer anderen Abhandlung[7] ausführlich durchgeführt werden.

7) Y. Komatu: Mixed boundary value problems. Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1, **6** (1953), 345-391. Eine Voranzeige über den einfachsten Fall ist schon erschienen in Y. Komatu, Eine gemischte Randwertaufgabe für einen Kreis. Proc. Japan Acad. **28** (1952), 339-341.