91. *Zum Verengungsideal des Primideals*[*)]

Von Takasaburo UKEGAWA

(Comm. by Kenjiro SHODA, M. J. A., April 13, 1970)

In den kommutativen Ringen sind die Verengungsideale der Primideale wieder Primideale, wobei das Verengungsideal den Durchschnitt des Ideals mit einem Unterring bedeutet, aber in den Schiefringen geht diese Eigenschaft verloren. Vor kurzem hat N. H. McCoy bewiesen [2], dass das Verengungsideal eines Primideals wieder ein Primideal ist, wenn der Unterring ein Ideal ist. Dieser Satz wurde auch in [3] und [4] erwähnt. In der vorliegenden Note betrachten wir den Unterring, der nicht immer ein Ideal ist und ausserdem die obenerwähnte Eigenschaft besitzt.

Definition. Es sei $\mathfrak{o}^*$ ein Schiefring, $\mathfrak{o}$ ein Unterring von $\mathfrak{o}^*$ (wir nehmen die Existenz des Einselementes nicht an). Ein in $\mathfrak{o}$ enthaltenes grösstes zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}^*$ heisst der Führer von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$ [1]. Wenn Verengungsideale jeder Primideale von $\mathfrak{o}^*$ wieder Primideale von $\mathfrak{o}$ sind, so heissen wir "$\mathfrak{o}$ besitzt die Eigenschaft ※ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$".

In dieser Note bezeichnen wir mit $M\supset N$, dass N eine Untermenge von M ist, und mit $M>N$, dass N eine echte Untermenge von M ist.

Hilfssatz. *Es sei $\mathfrak{o}^*$ ein Schiefring, $\mathfrak{o}$ ein Unterring von $\mathfrak{o}^*$, und $\mathfrak{f}$ der Führer von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}^*$ mit $(\mathfrak{P}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}^*$, so ist $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ ein Primideal aus $\mathfrak{o}$.*

Beweis. $\mathfrak{m}$ sei ein Untermodul von $\mathfrak{o}^*$, dann bezeichnen wir das von $\mathfrak{m}$ erzeugte zweiseitige Ideal aus $\mathfrak{o}^*$ mit $\tilde{\mathfrak{m}}$, d.h. $\tilde{\mathfrak{m}}=(\mathfrak{m}, \mathfrak{o}^*\mathfrak{m}, \mathfrak{m}\mathfrak{o}^*, \mathfrak{o}^*\mathfrak{m}\mathfrak{o}^*)$. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige zweiseitige Ideale aus $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\equiv 0(\mathfrak{p})$, wo $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ ist. Es ist $\mathfrak{P}\supset\tilde{\mathfrak{p}}\supset\widetilde{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\supset\widetilde{\mathfrak{a}\mathfrak{f}\mathfrak{b}}$, und da $\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{b}}=\tilde{\mathfrak{a}}\widetilde{\mathfrak{f}\mathfrak{b}}$ ist, so folgt $\widetilde{\mathfrak{a}\mathfrak{f}\mathfrak{b}}\supset\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{b}}$, also $\mathfrak{P}\supset\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{b}}$. Anderseits $(\mathfrak{P}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}^*$, also $\tilde{\mathfrak{a}}\equiv 0(\mathfrak{P})$ order $\tilde{\mathfrak{b}}\equiv 0(\mathfrak{P})$; also $\mathfrak{a}\subset\tilde{\mathfrak{a}}\cap\mathfrak{o}\subset\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}=\mathfrak{p}$, oder $\mathfrak{b}\subset\tilde{\mathfrak{b}}\cap\mathfrak{o}\subset\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}=\mathfrak{p}$, demnach $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{o}^*$ ein Schiefring, dessen Primideal teilerlos ist, und $\mathfrak{f}$ sei ein beliebiges zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}^*$. Ist $\mathfrak{o}_0$ ein Unterring von $\mathfrak{o}^*$, der hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$ die Eigenschaft ※ besitzt, so genügt auch $\mathfrak{o}=(\mathfrak{f}, \mathfrak{o}_0)$ die Eigenschft ※ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{f}'$ sei der Führer von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$, dann ist $\mathfrak{f}'\supset\mathfrak{f}$. Ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{f}')=\mathfrak{o}^*$, so ist $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ nach Hilfssatz ein Primideal von $\mathfrak{o}$. Wir nehmen jetzt an, es sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{f}')\neq\mathfrak{o}^*$,

*) Herrn Professor Keizo Asano zum 60. Geburtstag.

so folgt $\mathfrak{P}\subset(\mathfrak{P}, \mathfrak{k}')<\mathfrak{o}^*$, also $\mathfrak{P}=(\mathfrak{P}, \mathfrak{k}')$, also $\mathfrak{P}\supset\mathfrak{k}'\supset\mathfrak{k}$, d.h. $\mathfrak{P}\supset\mathfrak{k}$. Um zu beweisen, dass $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ ein Primideal ist, genügt es zu zeigen, dass aus $a\mathfrak{o}b\subset\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$, $a, b\in\mathfrak{o}$, $a\in\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ oder $b\in\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ folgt [2].

Es seien $a, b\in\mathfrak{o}$, $a\mathfrak{o}b\subset\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$. Wegen $a, b\in\mathfrak{o}$, gibt es Elemente $f, f'\in\mathfrak{k}$, $u, v\in\mathfrak{o}_0$ mit $a=f+u$, $b=f'+v$. Daraus folgt, dass für beliebige Elemente $g\in\mathfrak{k}$, $w\in\mathfrak{o}_0$, $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}\ni(f+u)(g+w)(f'+v)=f_0+uwv$, wo $f_0\in\mathfrak{k}\subset\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$, also $uwv\in\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$, folglich $u\mathfrak{o}_0v\subset\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$. Ferner $u, v\in\mathfrak{o}_0$, also $u\mathfrak{o}_0v\subset\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}\cap\mathfrak{o}_0=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}_0$; also $u\in\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}_0$ oder $v\in\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}_0$, da $\mathfrak{o}_0$ die Eigenschaft ※ besitzt. Anderseits ist $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}=\mathfrak{P}\cap(\mathfrak{o}_0, \mathfrak{k})=(\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}_0, \mathfrak{k})$, da $\mathfrak{P}\supset\mathfrak{k}$ ist, also $a=f+u\in(\mathfrak{k}, \mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}_0)=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ oder $b=f'+v\in(\mathfrak{k}, \mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}_0)$ $=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$, demnach ist $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ ein Primideal.

Um zu zeigen, dass im Satz 1 die Maximalität des Primideals notwendig ist, geben wir ein Beispiel. $\boldsymbol{Z}$ sei der Ring der ganzen rationalen Zahlen, und $\bar{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{Z}/(6)$, $\mathfrak{o}=\bar{\boldsymbol{Z}}[x]$, dann sind $\mathfrak{p}=(x, \bar{2})$, $\mathfrak{p}'=(x, \bar{3})$ Primideale aus $\mathfrak{o}$. $\mathfrak{o}^*=\sum_{i,j=1}^n e_{ij}\mathfrak{o}$ sei der volle Matrizenring vom Grade $n\geq 3$ über $\mathfrak{o}$, dann ist die Primideale von $\mathfrak{o}^*$ nicht immer teilerlos, z.B. $(\bar{2})[x]$ ist nicht teilerlos. Es seien $\mathfrak{P}=\sum_{i,j=1}^n e_{ij}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}'=\sum_{i,j=1}^n e_{ij}\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{o}_0$ $=(\mathfrak{P}, \bar{\boldsymbol{Z}})$, ferner

$$\mathfrak{a}=\begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{p} & \cdots & \mathfrak{p} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{b}=\begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{p}' & \cdots & \mathfrak{p}' \\ \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \end{pmatrix},$$

wo $\mathfrak{c}=(x)$ ist, dann sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Rechtsideale von $\mathfrak{o}_0$, denn $\mathfrak{a}\mathfrak{P}\subset\mathfrak{a}$ ist, also $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_0=\mathfrak{a}(\mathfrak{P}, \bar{1})=(\mathfrak{a}\mathfrak{P}, \mathfrak{a})\subset\mathfrak{a}$, ebenso wie $\mathfrak{b}$. Einerseits

$$\mathfrak{P}'\cap\mathfrak{o}=\begin{pmatrix} \mathfrak{p}' & \cdots & \mathfrak{p}' \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{p}' & \cdots & \mathfrak{p}' \end{pmatrix}\cap\left(\begin{pmatrix} \mathfrak{p} & \cdots & \mathfrak{p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{p} & \cdots & \mathfrak{p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{k} \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} * & \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{c} & * & & \vdots \\ \vdots & & & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} & * \end{pmatrix},$$

da $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{p}'=\mathfrak{c}$ ist, dabei bezeichnen wir mit k beliebige ganze rationale Zahlen. Also $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{P}'\cap\mathfrak{o}_0$, da $\mathfrak{p}\not\subset\mathfrak{c}$ ist, und ebenso $\mathfrak{b}\not\subset\mathfrak{P}'\cap\mathfrak{o}_0$, da $\mathfrak{p}'\not\subset\mathfrak{c}$ ist. Anderseits $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subset\mathfrak{P}'\cap\mathfrak{o}_0$, da $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\subset\mathfrak{c}$ ist; also ist $\mathfrak{P}'\cap\mathfrak{o}_0$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_0$ nicht.

Korollar 1. *Es sei $\mathfrak{o}^*$ ein Schiefring mit Einselement* 1, *und jedes Primideal von $\mathfrak{o}^*$ sei teilerlos. Ist $\mathfrak{o}_0$ ein im Zentrum von $\mathfrak{o}^*$ enthaltener und* 1 *enthaltender Unterring von $\mathfrak{o}^*$, so genügt* $(\mathfrak{k}, \mathfrak{o}_0)=\mathfrak{o}$ *die Eigenschaft ※ für jedes zweiseitiges Ideal $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{o}^*$.*

Korollar 2. *Ist $\mathfrak{o}^*$ ein Schiefring mit Einselement* 1, *und jedes Primideal von $\mathfrak{o}^*$ sei teilerlos, so genügt* $(\mathfrak{k}, 1)$ *die Eigenschaft ※ für jedes zweiseitiges Ideal $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{o}^*$.*

Satz 2. *Es sei S ein Schiefring mit Einselement* 1, $\mathfrak{o}^*$ *eine Ordnung von S, in der jedes Primideal teilerlos ist, und* $\mathfrak{o}$ *eine in* $\mathfrak{o}^*$ *enthaltene und mit* $\mathfrak{o}^*$ *äquivalente Ordnung von S.* $\mathfrak{f}$ *sei der Führer von* $\mathfrak{o}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{o}^*$. *Ist* $\mathfrak{o}_0$ *die minimale Ordnung von S, deren Führer hinsichtlich* $\mathfrak{o}^*$ $\mathfrak{f}$ *ist, so genügt* $\mathfrak{o}_0$ *die Eigenschaft* ※.

Beweis. Die Behauptung ist klar, da die minimale Ordnung, deren Führer hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$ $\mathfrak{f}$ ist, mit $(\mathfrak{f}, 1)$ gegeben wird.

Im Satz 2 ist die Minimalität der Ordnung notwendig; die folgende Beispiel zeigt diese Tatsache.

$\mathfrak{o}$ sei der Ring der ganzen rationalen Zahlen, und $\mathfrak{p}=(p)$, $\mathfrak{c}=(p^2)$, wo $\mathfrak{p}$ eine Primzahl ist. Es seien

$$\mathfrak{o}^*=\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\mathfrak{o}=\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \cdots & \mathfrak{o} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{o} & \cdots & \mathfrak{o} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{l}=\textstyle\sum_{i=1}^{n} e_{i1}\mathfrak{o}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} e_{ij}\mathfrak{c}=\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \end{pmatrix}, \quad n\geq 3,$$

dann ist $\mathfrak{l}$ ein Linksideal von $\mathfrak{o}^*$, da $\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}\subset\mathfrak{l}$ ist. Es sei $\mathfrak{o}_0=(\mathfrak{l}, 1)$, dann wird

$$\mathfrak{o}_0=(\mathfrak{l},1)=\left(\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} * & \mathfrak{c} & \cdot & \cdot & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{o} & * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathfrak{c} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & * & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{c} & \cdot & \mathfrak{c} & * \end{pmatrix}$$

$$>\begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \end{pmatrix}=\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\mathfrak{c}=\mathfrak{f},$$

wo $\mathfrak{f}$ ein zweiseitiges Ideal aus $\mathfrak{o}^*$ und k eine beliebige ganze rationale Zahl ist. Es ist klar, dass $\mathfrak{o}_0$ eine in $\mathfrak{o}^*$ enthaltene und mit $\mathfrak{o}^*$ äquivalente Ordnung ist, deren Führer hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$ $\mathfrak{f}$ ist; aber $\mathfrak{o}_0>(\mathfrak{f}, 1)$, d.h. $\mathfrak{o}_0$ ist nicht die minimale Ordnung. Es sei

$$\mathfrak{P}=\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\mathfrak{p}=\begin{pmatrix} \mathfrak{p} & \cdots & \mathfrak{p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{p} & \cdots & \mathfrak{p} \end{pmatrix}, \quad \text{dann gilt}$$

$$\mathfrak{o}_0\cap\mathfrak{P}=\left(\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix}\right)\cap\begin{pmatrix} \mathfrak{p} & \cdots & \mathfrak{p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{p} & \cdots & \mathfrak{p} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} * & \mathfrak{c} & \cdot & \cdot & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{p} & * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathfrak{c} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & * & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{c} & \cdot & \mathfrak{c} & * \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen, dass $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}_0$ nicht ein Primideal ist. Es seien

$$\mathfrak{a}_0 = \begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \cdots & & \mathfrak{c} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathfrak{c} & \cdots & & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{b}_0 = \begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{c} & \cdot & & \vdots \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{c} & & \vdots \\ \mathfrak{c} & \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} \end{pmatrix}$$

dann $\mathfrak{a}_0\mathfrak{l} \subset \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0\mathfrak{l} \subset \mathfrak{b}_0$, also $\mathfrak{a}_0\mathfrak{o}_0 \subset \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0\mathfrak{o}_0 \subset \mathfrak{b}_0$, folglich sind $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ in $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{o}_0$ nicht enthaltene Rechtsideale von $\mathfrak{o}_0$. Anderseits haben wir, $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{P} \cap \mathfrak{o}_0$, also ist $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{o}_0$ ein Primideal nicht.

Literatur

[1] K. Asano und T. Ukegawa: Ergänzende Bemerkungen über die Arithmetik in Schiefringen. J. Inst. Poly. Osaka City Univ., **3** (1-2), 1-7 (1952).

[2] N. H. McCoy: Prime ideals in general rings. Amer. J. Math., **71**, 823-833 (1948).

[3] M. Nagata: On the theory of radicals in a ring. J. Math. Soc. Jap., **3** (2), 330-344 (1951).

[4] T. Nakayama and G. Azumaya: Algebra. II (1954) (Japanisch).