142. *Sur les équations* $-\frac{d^2}{dt^2}u+t^\alpha \Lambda u=f,\ \alpha\geqq 0$

Par Tadato MATSUZAWA
Institut Mathématique Faculté des Sciences Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., June 12, 1970)

§0. Introduction. Nous démontrons dans le §2 la régularité des solutions faibles du problème au bord pour les équations à coéfficients opérationnels dégénérés:

$$Lu=-\frac{d^2}{dt^2}u+t^\alpha \Lambda u=f, \quad \alpha\geqq 0,$$

Λ auto-adjoint, positif dans un espace hilbertien.

Nous poursuivons le raisonnement adopté dans [7] au lieu de la régularisation elliptique (cf. [1]). Les résultats dans [1] concernant les espaces avec poids (préparés dans le §1) y sont importants. Dans le §3, nous notons que les résultats principaux dans [1] et [7] sont obtenus comme applications du Théorème 2.5.

§1. Espaces avec poids. Utilisons les notations dans [5]. Soit Y un espace de Hilbert. On désigne par $L^2(0,T;Y)$ les (classes de) fonctions $t\mapsto f(t)$ de carré intégrable sur $[0,T]$ à valeurs dans Y. Muni de la norme

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_Y^2 dt\right)^{1/2}=\|f\|_{L^2(0,T;Y)}, \tag{1.1}$$

$L^2(0,T;Y)$ est un espace de Hilbert. On désigne par $H^m(0,T;Y)$ les (classes de) fonctions f telles que $f,\cdots,D_t^m f\in L^2(0,T;Y)$, où $D_t^m f$ désigne la dérivée (d'ordre m) de f au sens des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans Y. On le munit de la norme

$$\|f\|_{H^m(0,T;Y)}=(\|f\|^2_{L^2(0,T;Y)}+\cdots+\|D_t^m f\|^2_{L^2(0,T;Y)})^{1/2}. \tag{1.2}$$

Soit maintenant Λ un opérateur non borné dans Y, auto-adjoint, positif de domaine $D(\Lambda)$. Soit α réel, on considère l'espace de Hilbert $W^m(\alpha,\theta)$ comme suit:

$$W^m(\alpha,\theta)=\{u\,|\,u\in H^m(0,T;Y),\ t^\alpha u\in L^2(0,T;D(\Lambda^\theta)\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^m(\alpha,\theta)}=(\|u\|^2_{H^m(0,T;Y)}+\|t^\alpha u\|^2_{L^2(0,T;D(\Lambda^\theta))})^{1/2}. \tag{1.3}$$

Théorème 1.1 (cf. [1], [3], [6]). *Supposons* $-\frac{1}{2}<\alpha$. *L'application* $u\mapsto D_t^j u(0)$, $(j=0,\cdots,m-1)$ *est linéaire, continue et surjective de* $W^m(\alpha,1)$ *dans* $D(\Lambda^{(2m-2j-1)/2(\alpha+m)})$.

Désignons par $\mathring{W}^m(\alpha,\theta)$ les u appartenant à $W^m(\alpha,\theta)$ telles que

$$u(0)=\cdots=D_t^{m-1}u(0)=u(T)=\cdots=D_t^{m-1}u(T)=0.$$

Théorème 1.2 (cf. [1]). *Soit $s\geqq 0$. Pour tout nombre réel α, tout entier m positif et tout β, $-m\leqq\beta\leqq\alpha$, nous avons l'inclusion algébrique et topologique*

$$\mathring{W}^m(\alpha,s)\subset\mathring{W}^m\left(\beta, s\cdot\frac{\beta+m}{\alpha+m}\right).$$

Dans le cas $\alpha=-m$ on replace $\dfrac{\beta+m}{\alpha+m}$ par 1.

§2. Les équations $-D_t^2u+t^\alpha\Lambda u=f$.

Dans la suite, suppons que $\alpha\geqq 0$.

Soient Y et Λ comme dans le §1. Posons

$$\mathring{V}=\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right).$$

On mumit $\mathring{V}$ à nouveau de la norme:

$$\|u\|_{\mathring{V}}=(\|D_tu\|^2_{L^2(0,T;Y)}+\|t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u\|^2_{L^2(0,T;Y)})^{1/2}, \tag{2.1}$$

et du produit scalaire:

$$E(u,v)=[D_tu,D_tv]+[t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u, t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}v], \tag{2.2}$$

où [,] désigne le produit scalaire dans $L^2(0,T;Y)$.

Définition 2.1. *Soit $f\in L^2(0,T;Y)$. Nous appelons $u\in\mathring{V}$ une solution faible du probléme au bord:*

$$Lu=-D_t^2u+t^\alpha\Lambda u=f \text{ dans }]0,T[, \tag{2.3}$$

$$u(0)=u(T)=0 \tag{2.4}$$

si u vérifie

$$E(u,v)=[f,v],\quad v\in\mathring{V}. \tag{2.5}$$

Comme la forme $v\to[f,v]$ est continue sur $\mathring{V}$, nous avons le théorème suivant par le Théorème de Riesz.

Théorème 2.1. *Soit $f\in L^2(0,T;Y)$. Il existe une solution faible u unique dans $\mathring{V}$ pour le problème au bord* (2.3) *et* (2.4). *On a l'inégalité*

$$\|u\|_{\mathring{V}}\leqq C^{1)}\|f\|_{L^2(0,T;Y)} \tag{2.6}$$

La constante C ne dépend pas de $f\in L^2(0,T;Y)$.

1) Dans la suite, les C désignent des constantes diverses.

Théorème 2.2. *Soient $f\in L^2(0,T;Y)$ et $u\in\mathring{V}$ la solution faible du problème au bord* (2.3), (2.4). *Nous avons $\Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u\in\mathring{V}$ et l'inégalité*

$$\|\Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u\|_{\mathring{V}}\leqq C\|f\|_{L^2(0,T;Y)} \tag{2.7}$$

La constante C ne dépend pas de $f\in L^2(0,T;Y)$.

Démonstration. Soit

$$\Lambda^\theta=\int_{\lambda_0}^\infty\lambda^\theta dE(\lambda),\quad \theta\geqq 0 \text{ (cf. [10])}.$$

Pour $f\in L^2(0,T;Y)$, définissons $f_\lambda(\lambda\geqq\lambda_0)$ par

$$f_\lambda(t)=E(\lambda)f(t),\quad 0\leqq t\leqq T. \tag{2.8}$$

On vérifie que

(2.9) $$f_\lambda(t)\in L^2(0,T;D(\Lambda^\theta)),\quad 0\leqq\theta<\infty,$$
(2.10) $$\lim_{\lambda\to\infty} f_\lambda=f \text{ dans } L^2(0,T;Y).$$

Ensuite, considérons le problème au bord (2.3) et (2.4) avec $f=f_\lambda$. Il existe la solution faible $u_\lambda\in\mathring{V}$ telle que
$$\|u_\lambda\|_{\mathring{V}}\leqq C\|f_\lambda\|_{L^2(0,T;Y)}$$
(Théorème 2.1). De plus, nous vérifions facilement que $\Lambda^\theta u_\lambda\in\mathring{V}$, $0\leqq\theta<\infty$. On a particulièrement $t^\alpha\Lambda u_\lambda\in L^2(0,T;Y)$.

Comme l'équation (2.3) s'écrit: $-D_t^2u_\lambda=-t^\alpha\Lambda u_\lambda+f_\lambda$, il s'ensuit que $u_\lambda\in W^2(\alpha,1)$ et u_λ vérifie (2.3).

Prenons $f=\Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}f_\lambda$, $u=v=\Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u_\lambda$, nous avons
$$\begin{aligned}\|\Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u_\lambda\|^2_{\mathring{V}}&=E(\Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u_\lambda,\ \Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u_\lambda)\\&=[\Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}f_\lambda,\ \Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u_\lambda]\\&\leqq C\|f_\lambda\|_{L^2(0,T;Y)}\cdot\|\Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u_\lambda\|_{\mathring{V}},\end{aligned}$$
où nous avons utilisé le Théorème 1.2 pour le cas $\dfrac{\alpha}{2}$, $m=1$, $s=\dfrac{1}{2}$, $\beta=0$. On en déduit que
$$\|\Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u_\lambda\|_{\mathring{V}}\leqq C\|f_\lambda\|_{L^2(0,T;Y)}.$$
En faisant tendre λ vers infini, on obtient (2.7). C.Q.F.D.

Théorème 2.3. *Soient $f\in L^2(0,T;Y)$ et $u\in\mathring{V}$ comme ci-dessus. Nous avons $u\in\mathring{W}^1\left(\dfrac{\alpha}{2}-1,\dfrac{1}{2}\right)$ et en particulier, nous avons l'inégalité*

(2.11) $$\|t^{\alpha/2-1}\Lambda^{1/2}u\|_{L^2(0,T;Y)}\leqq C\|f\|_{L^2(0,T;Y)}.$$
La constante C ne dépend pas de f.

Démonstration. Nous avons
$$\begin{aligned}\|t^{\alpha/2-1}\Lambda^{1/2}u\|_{L^2(0,T;Y)}&=\|t^{\alpha/2-1}\Lambda^{\alpha/2/2(\alpha/2+1)},\ \Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u\|_{L^2(0,T;Y)}\\&\leqq C\|\Lambda^{1/2(\alpha/2+1)}u\|_{\mathring{V}},\end{aligned}$$
où nous avons utilisé le théorème 1.2 au cas $\dfrac{\alpha}{2}$, $m=1$, $s=\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{\alpha}{2}-1$.

Par l'inéglité (2.7), on obtient (2.11). C.Q.F.D.

Théorème 2.4. *Soient $f\in L^2(0,T;Y)$ et $u\in\mathring{V}$ comme ci-dessus. Nous avons $t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u\in\mathring{V}$ et l'inégalité*

(2.12) $$\|t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u\|_{\mathring{V}}\leqq C\|f\|_{L^2(0,T;Y)}.$$
La constante C ne dépend pas de $f\in L^2(0,T;Y)$,

Démonstration. Soient f_λ et $u_\lambda(\lambda\geqq\lambda_0)$ comme *ci*-dessus. Comme dans la démonstration du Théorème 2.2, on a
$$t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda\in\mathring{V},\ t^\alpha\Lambda u_\lambda\in L^2(0,T;Y),$$
et
$$Lu_\lambda=-D_t^2u_\lambda+t^\alpha\Lambda u_\lambda=f_\lambda \text{ dans }]0,T[.$$
En notant que
$$L(t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda)=t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}f_\lambda+\frac{\alpha}{2}\,t^{\alpha/2-1}\Lambda^{1/2}D_tu_\lambda+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)t^{\alpha/2-2}\Lambda^{1/2}u_\lambda,$$

on a

$$\|t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda\|^2_{\mathring{V}}=[t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}f_\lambda,\ t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda]+\frac{\alpha}{2}[t^{\alpha/2-1}\Lambda^{1/2}D_tu_\lambda,\ t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda]$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)[t^{\alpha/2-2}\Lambda^{1/2}u_\lambda,\ t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda].$$

Etudions les trois termes à droite:

$$|[t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}f_\lambda,\ t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda]|\leqq C\|f_\lambda\|_{L^2(0,T;Y)}\cdot\|t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda\|_{\mathring{V}}.$$

$$|[t^{\alpha/2-1}\Lambda^{1/2}D_tu_\lambda,\ t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda]|$$

$$=|[t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}D_tu_\lambda,\ t^{\alpha/2-1}\Lambda^{1/2}u_\lambda]|$$

$$\leqq|[D_t(t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda),\ t^{\alpha/2-1}\Lambda^{1/2}u_\lambda]|+\frac{\alpha}{2}|[t^{\alpha/2-1}\Lambda^{1/2}u_\lambda,\ t^{\alpha/2-1}\Lambda^{1/2}u_\lambda]|$$

$$\leqq C_1\|t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda\|_{\mathring{V}}\cdot\|f_\lambda\|_{L^2(0,T;Y)}+C_2\|f_\lambda\|^2_{L^2(0,T;Y)}.$$

(Théorème 2.3).

$$[t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda,\ t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda]=\|t^{\alpha/2-1}\Lambda^{1/2}u_\lambda\|^2_{L^2(0,T;Y)}\leqq C\|f_\lambda\|^2_{L^2(0,T;Y)}$$

(Théorème 2.3).

D'où il s'ensuit que

$$\|t^{\alpha/2}\Lambda^{1/2}u_\lambda\|_{\mathring{V}}\leqq C\|f_\lambda\|.$$

En faisant tendre λ vers infini, on a (2.12). C.Q.F.D.

Par le Théorème 2.4, et (2.3) on a $D_t^2u\in L^2(0,T;Y)$ (donc $u\in W^2(\alpha,1)$) et compte tenu du Théorème 1.1 on obtient le

Théorème 2.5. *Soient* $f\in L^2(0,T;Y)$, $a_1\in D(\Lambda^{3/2(\alpha+2)})$ *et* $a_2\in D(\Lambda^{3/4})$. *Il existe une solution u unique dans* $W^2(\alpha,1)$ *pour le problème au bord:*

(2.3) $$Lu=-D_t^2u+t^\alpha\Lambda u=f \text{ dans }]0,T[,$$

(2.4)′ $$u(0)=a_1,\quad u(T)=a_2.$$

L'application $u\mapsto(f,a_1,a_2)$ *est linéaire, continue et surjective de* $W^2(\alpha,1)$ *dans* $L^2(0,T;Y)\times D(\Lambda^{3/2(\alpha+2)})\times D(\Lambda^{3/4})$. *On a l'inégalité*

(2.13) $$\|u|_{W^2(\alpha,1)}\leqq C\{\|f\|_{L^2(0,T;Y)}+\|a_1\|_{D(\Lambda^{3/2(\alpha+2)})}+\|a_2\|_{D(\Lambda^{3/4})}\}.$$

§3. Quelques applications et généralisations.

(i) Soit Ω un domaine borné dans R^n de frontière assez régulière. Nous prenons $Y=L^2(\Omega)$ et

$$\Lambda=-\sum_{1\leqq i,j\leqq n}D_{x_j}(a_{ij}(x)D_{x_i}),$$

avec les hypothèses suivantes

$$a_{ij},\ \text{réels},\ \in C^\infty(\bar{\Omega}),\ a_{ij}=a_{ji},\ 1\leqq i,\ j\leqq n,$$

$$\sum_{1\leqq i,j\leqq n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqq C_0|\xi|^2,\ C_0>0,\ \xi\in R^n,\ \text{dans } \bar{\Omega}.$$

Alors Λ est un opérateur auto-adjoint, positif de domaine

$$D(\Lambda)=\mathring{H}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega).$$

Donc, Théorème 4.2 dans [7] est obtenu comme dans le cas particulier du Théorème 2.5.

(ii) On peut étendre le résultat dans (i) pour l'équation

$$Lu=L_1^*L_1u-t^\alpha\sum_{1\leqq i,j\leqq n}D_{x_j}(a_{ij}(x,t)D_{x_i}u)=f,$$

où $L_1u=a(x,t)D_tu+b(x,t)u$, $a(x,t)$, $b(x,t)\in C^\infty(\bar{Q})$, $a(x,t)$ ne s'annulant pas sur $\bar{Q}$, $Q=\Omega\times]0,T[$, $a_{ij}(x,t)$ réels, $\in C^\infty(\bar{Q})$, $a_{ij}(x,t)=a_{ji}(x,t)$, $1\leqq i,\ j\leqq n$, et

$$\sum_{1\leqq i,j\leqq n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqq C_0|\xi|^2,\ C_0>0,\ \xi\in R^n,\ \text{dans}\ \bar{Q}.$$

Donc, le Théorème II, 3 dans [1] est démontré à partir de ce résultat.

(iii) On peut démontrer l'analyticité des solutions des équations

$$u_{tt}+t^{2k}\sum_{1\leqq i,j\leqq n} D_{x_j}(a_{ij}(x,t)D_{x_i}u)=f,\quad k=0,1,2,\cdots,$$

par la méthode adoptée dans [7], où les fonctions $a_{ij}(x,t)$ sont analytiques dans $Q=\Omega\times]-T,T[$ avec les conditions d'ellipticité comme cidessus.

Références

[1] Baouendi Mohamed Salah: Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Bull. Soc. Math. France, **95**, 45–87 (1967).

[2] Fujiwara, D.: L^p-theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space. Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **15** (2), 169–177 (1968).

[3] Lions, J. -L.: Théorème de trace et d'interpolation. I. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Serie 3, **13**, 389–403 (1959).

[4] ——: Espaces d'interpolation et domaine de puissances fractionnaires d'opérateurs. Jour. Math. Soc. Japan, **14**(2), 233–241 (1962).

[5] Lions, J. -L., et Magenes, E.: Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. I. Paris, Dunod (1968).

[6] Lions, J. -L., et Peetre, J.: Sur une classe d'espaces d'interpolation. Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publ. Math., **19**, 5–68 (1964).

[7] Matsuzawa, T.: Sur les équations $u_{tt}+t^\alpha u_{xx}=f$ $(\alpha\geqq 0)$ (à paraître dans Nagoya Math. Jour.).

[8] ——: Sur les équations $u_t-t^\alpha u_{xx}=f$ $(\alpha\geqq 0)$ (à paraître dans Nagoya Math. Jour.).

[9] Nirenberg, L.: Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math., **8**, 648–678 (1955).

[10] Yoshida, K.: Functional analysis. Berlin, Springer Verlag (1965) (Grundlehren, 123).