# 241. *Quelques exemples des ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre.* II

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1970)

Ce petit mémoire est la suite de mon article précédent [4]. Premièrement, dans le paragraphe 1 de [4], le Théorème 1 et la preuve du Théorème 2 contenaient des fautes (le Théorème 2 lui-même a été sauvé). Je vais les corriger dans le paragraphe 4. Et le paragraphe 5 est consacré à citer un autre exemple simple des ζ-fonctions d'Epstein.

**§ 4.** Je vais reproduire tous les contenus du § 1 dans [4]. Soient $n$ un entier$\geqq 2$ et $\Omega$ la boule unitaire de $\boldsymbol{R}^n$ :

$$\Omega=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in \boldsymbol{R}^n\,;\,|x|\equiv\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}<1\right\}. \tag{1}$$

Traitons, dans $\Omega$, un opérateur différentiel $L$ elliptique dégénéré au bord

$$Lu(x)=-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(1-|x|^2)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right\}+(n-1)u(x). \tag{2}$$

$L$ est auto-adjoint positif dans $L^2(\Omega)$ du domaine $\mathscr{D}[L]=\{u(x)\in H^1(\Omega)\,;\,(1-|x|^2)u(x)\in H^2(\Omega)\}$. Son spectre se consiste des valeurs propres positives $\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^{\infty}$ dont chacune $\lambda_{k,l}$ est de multiplicité $\mu(k)<\infty$, où

$$\lambda_{k,l}=(2l+2)(2l+2k+n-1),\ \text{pour } k,l=0,1,2,\cdots; \tag{3}$$

$$\begin{cases}\mu(0)=1 \text{ et } \mu(k)=2 \text{ pour } k\geqq 1, \text{ si } n=2\,; \\ \mu(k)=(2k+n-2)\dfrac{(k+n-3)\,!}{k\,!(n-2)\,!} \text{ pour } k\geqq 0, \text{ si } n\geqq 3.\end{cases} \tag{4}$$

**Proposition 1.** ($\alpha$) *$\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^{\infty}$ est la totalité des valeurs propres de L dont chacune $\lambda_{k,l}$ est de multiplicité $\mu(k)<\infty$ ;*

($\beta$) *Pour $(k,l)$ fixe, une base des fonctions propres correspondante à $\lambda_{k,l}$ est formée par les $\mu(k)$ fonctions (normalisées) suivantes*

$$u_{k,l,\alpha}(x)=\sqrt{4l+2k+n}\,P_l^{(0,k+\nu)}(2|x|^2-1)H_{k,\alpha}(x),\quad \text{pour } k,l=0,1,2,\cdots;\ 1\leqq\alpha\leqq\mu(k), \tag{5}$$

*où $\{H_{k,\alpha}(x)\}_{\alpha=1}^{\mu(k)}$ est une base des polynômes harmoniques homogènes d'ordre k, les $P_l^{(a,b)}(t)$ sont les polynômes de Jacobi (voir p. 168 du Vol. 2 de [2]), et dernièrement $\nu=(n-2)/2$.*

Soit maintenant $T>0$ très grand et désignons par $N(T)$ la somme des $\mu(k)$ pour lesquelles $\lambda_{k,l}\leqq T$. Alors, Théorème 1 dans [4] se corrige comme suit:

**Theoreme 1.** *Lorsque T tend vers l'infini, N(T) se comporte asymptotiquement comme suit:*

$$N(T) \sim \frac{T}{4} \log T \qquad , \text{ si } n=2; \tag{6}$$

$$N(T) \sim \frac{2^{3-2n}\zeta(n-1\,;\,1/2)}{(n-1)\,!} T^{n-1}, \text{ si } n \geqq 3. \tag{7}$$

**Démonstration de (6).** Soit $T>0$ suffisamment grand et notons par $\nu(l, T)$, pour $l$ fixe, le nombre des $k$ pour lesquels $\lambda_{k,l} \leqq T$. Alors, en posant $T_1 = (\sqrt{T}-1)/2$, nous avons

$$\begin{cases} \nu(l, T) = \left[\dfrac{T}{2(2l+1)} - l + \dfrac{1}{2}\right], \text{ si } 0 \leqq l \leqq [T_1], \\ \text{et } \nu(l, T) = 0 \qquad , \text{ si } l > [T_1], \end{cases} \tag{8}$$

où $[T_1]$ est la partie entière de $T_1$, et nous avons naturellement

$$N(T) = \nu(0, T) + 2 \sum_{l=1}^{[T_1]} \nu(l, T). \tag{9}$$

Estimons la différence $N(T) - \nu(0, T)$:

$$2\int_0^{T_1} \left(\frac{T}{2(2t+1)} - t - \frac{1}{2}\right) dt < N(T) - \nu(0, T)$$

$$\leqq 2\int_0^{T_1} \left(\frac{T}{2(2t+1)} - t + \frac{1}{2}\right) dt + \frac{T+1}{2}.$$

Le calcul de ces intégrales est facile et nous obtenons finalement (6), car $\nu(0, T) \sim T/2$. C.Q.F.D.

**Démonstration de (7).** Nous pourrions vérifier (7) par le même principe que celui du cas $n=2$ ci-dessus, mais il sera intéressant d'introduire la $\zeta$-fonction d'Epstein pour $L$

$$\zeta_L(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mu(k) \lambda_{k,l}^{-s}, \tag{10}$$

et de déduire (7) par la recherche des singularités de $\zeta_L(s)$ dans le $s$-plan complexe. Remarquons que la série de (10) est absolument convergente si Re. $s > n-1$ grâce au résultat de Baouendi-Goulaouic (voir le Théorème 4 de [1]). Nous allons maintenant extraire toutes les singularités possibles de $\zeta_L(s)$ et démontrer qu'elle est une fonction méromorphe dans le $s$-plan tout entier. Pour l'effectuer, nous avons besoin d'un lemme:

**Lemme.** *Soient $x>0$, $y>0$ et posons, pour* Re. $\beta > 1$ *et* Re. $(\alpha+\beta) > 2$,

$$\begin{cases} F(\alpha, \beta\,; x, y) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} (l+x)^{-\alpha} \sum_{p=l}^{\infty} (p+y)^{-\beta}, \text{ et} \\ f(\alpha, \beta\,; x, y) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} (l+x)^{-\alpha} \int_l^{\infty} (v+y)^{-\beta} dv. \end{cases} \tag{11}$$

*Lorsqu'on fixe $x>0$ et $y>0$,*

(i) *la fonction $(\beta-1)f(\alpha, \beta\,; x, y)/\Gamma(\alpha+\beta-2)$ se prolonge comme une fonction entière de $(\alpha, \beta)$; et,*

(ii) *la fonction $F(\alpha, \beta: x, y)/\{\Gamma(\beta-1)\Gamma(\alpha+\beta-2)\}$ le fait également.*

**Preuve.** $F$ et $f$ satisfont à l'équation fonctionnelle

$$\frac{\partial}{\partial y}u(\alpha,\beta;x,y)=-\beta u(\alpha,\beta+1;x,y), \tag{12}$$

et, lorsque $y=x>0$, nous voyons que

$$f(\alpha,\beta;x,y)=\frac{1}{\beta-1}\zeta(\alpha+\beta-1;x), \tag{13}$$

où $\zeta(z;a)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+a)^{-z}$ (Re. $z>1$ et $a>0$) est la $\zeta$-fonction de Riemann. D'où l'on a le développement, pour chaque $k$: entier $\geqq 1$,

$$f(\alpha,\beta;x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Gamma(\beta+j-1)}{\Gamma(\beta)j!}(x-y)^j\zeta(\alpha+\beta+j-1;x)$$
$$-\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)(k-1)!}\int_x^y(u-y)^{k-1}f(\alpha,\beta+k;x,u)du. \tag{14}$$

Dans le membre à droite de (14), le dernier terme est holomorphe dans Re. $\beta>1-k$ et Re. $(\alpha+\beta)>2-k$. Nous avons donc extrait, comme la première somme à droite de (14), toutes les singularités de $f$ situées dans Re. $\beta>1-k$ et Re. $(\alpha+\beta)>2-k$, et nous connaissons que la fonction $\zeta(z;a)-1/(z-1)$ est une fonction entière de $z$, d'où l'énoncé (i) du lemme.

Passons ensuite à la recherche de $F$: Nous voyons d'abord que

$$f(\alpha,\beta;x,y)=\int_0^1 F(\alpha,\beta;x,y+u)du. \tag{15}$$

Posons $G(\alpha,\beta;x,y)=F(\alpha,\beta;x,y)-f(\alpha,\beta;x,y)$. Alors, nous avons

$$G(\alpha,\beta;x,y)=\beta\int_0^1 F(\alpha,\beta+1;x,y+1-u)udu$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{\Gamma(\beta+j)}{\Gamma(\beta)}\int_0^1\cdots\int_0^1 f(\alpha,\beta+j;x,y$$
$$+j-u_1-\cdots-u_j)u_1\cdots u_j du_1\cdots du_j$$
$$+\frac{\Gamma(\beta+K)}{\Gamma(\beta)}\int_0^1\cdots\int_0^1 G(\alpha,\beta+k;x,y$$
$$+k-u_1-\cdots-u_k)u_1\cdots u_k du_1\cdots du_k,$$
$$\text{quel que soit}\quad k:\text{ entier }\geqq 1. \tag{16}$$

La première égalité de (16) nous montre que $G(\alpha,\beta;x,y)$ est holomorphe dans Re. $\beta>0$ et Re. $(\alpha+\beta)>1$. Et la deuxième égalité extrait, comme la première somme à droite, toutes les singularités situées dans Re. $\beta>-k$ et Re. $(\alpha+\beta)>1-k$. Nous avons enfin l'énoncé (ii) grâce à (i). C.Q.F.D.

**Corollaire.** *Les fonctions*

$$f(\alpha,\beta;x,y)-\frac{\zeta(\alpha+\beta-1;x)}{\beta-1}\quad \textit{et}\quad F(\alpha,\beta;x,y)-\frac{\zeta(\alpha+\beta-1;x)}{\beta-1}$$

*sont holomorphes dans* Re. $\beta>0$ *et* Re. $(\alpha+\beta)>1$.

Nous revenons à la fonction $\zeta_L(s)$. Exprimons-la à l'aide des $F(\alpha, \beta; x, y)$:

$$\zeta_L(s)=2^{1-2s}F\left(s, s; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)-2^{-2s}\zeta\left(2s; \frac{1}{2}\right), \text{ si } n=2; \tag{17}$$

$$2^{2s}\zeta_L(s)=\frac{2}{(n-2)!}\sum_{p=0}^{n-2}(-1)^p\binom{n-2}{p}F\left(s-p, s+p+2-n; \frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$
$$+\sum_{q+r<n-2}C_{q,r}F\left(s-q, s-r; \frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right), \text{ si } n\geqq 3, \tag{18}$$

où les $C_{q,r}$ sont des constantes numériques indépendantes de $s$. Nous pouvons en déduire le résultat suivant:

**Theoreme 2.** *Si* $n\geqq 2$, $\zeta_L(s)/\{\Gamma(s-n+1)\Gamma(2s-n)\}$ *se prolonge comme une fonction entière de* $s$;

(ii) *Si* $n=2, 4(s-1)\zeta_L(s)-(s-1)^{-1}$ *est holomorphe dans* Re. $s>\frac{1}{2}$;

(iii) *Si* $n\geqq 3$,

$$\zeta_L(s)-\frac{2^{3-2n}}{(s-n+1)(n-2)!}\zeta\left(n-1; \frac{1}{2}\right)$$

*est holomorphe dans* Re. $s>n-\frac{3}{2}$.

**Fin de la démonstration de (7).** On n'a qu'à appliquer le théorème tauberien d'Ikéhara à $\zeta_L(s)$ dont la singularité la plus à droite $s=n-1$ est pôle simple, et le résidu à ce point est connu par le (iii) du Théorème 2. C.Q.F.D.

**§5.** Dans ce paragraphe, je vais citer un autre exemple de $\zeta$-fonction d'Epstein pour un opérateur elliptique.

Soit $M$ une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $(n-1)$ dont le point générique est noté par $\xi$. Posons

$$\mathcal{L}\phi(\xi)=\mathcal{L}\left(\xi; \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\phi(\xi)=\phi(\xi)-\Delta_M\phi(\xi), \tag{19}$$

où $\Delta_M$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $M$. Alors, $\mathcal{L}$ est auto-adjoint $\geqq I$ sur $L^2(M)$ par rapport à l'élément volumique $d\xi$ sur $M$, le domaine de $\mathcal{L}$ est $H^2(M)$. Soit $\{\mu_j\}_{j=1}$ la suite des valeurs propres de $\mathcal{L}$ numérotées suivant l'ordre de croissance: $1=\mu_1\leqq\mu_2\leqq\cdots$ (on répète chaque $\mu_j$ autant de fois que sa multiplicité). Désignons par $\{w_j(\xi)\}_{j=1}^{\infty}$ le système orthonormal complet formé par les fonctions propres $w_j(\xi)$ correspondantes à $\mu_j$. Considérons la variété $\mathcal{M}=M\times \boldsymbol{R}_+=M\times\{t; 0<t<\infty\}$ et traitons sur $\mathcal{M}$ un opérateur différentiel

$$Lu(\xi, t)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(t\frac{\partial u}{\partial t}\right)+t\mathcal{L}\left(\xi; \frac{\partial}{\partial\xi}\right)u(\xi, t). \tag{20}$$

Alors $L$ est elliptique du second ordre qui est dégénéré sur le bord $\partial\mathcal{M}=M\times\{t=0\}$. Il est de plus auto-adjoint $\geqq I$ sur $L^2(\mathcal{M})$ du domaine $\mathcal{D}[L]=\{u(\xi, t)\in H^1(\mathcal{M}); tu(\xi, t)\in H^2(\mathcal{M})\}$. Son spectre se consiste des valeurs propres $\{\lambda_{l,j}\}_{l,j=1}^{\infty}$ dont chacune est de multiplicité 1, où

$$\lambda_{l,j}=(2l-1)\sqrt{\mu_j}\,,\ \text{pour } l, j=1,2,\cdots \tag{21}$$

Pour chaque $(l, j)$, la fonction propre (normalisée) correspondant à $\lambda_{l,j}$ est

$$u_{l,j}(\xi, t)=(4\mu_j)^{1/4}w_j(\xi)\exp(-\sqrt{\mu_j}\,t)L_{l-1}(2\sqrt{\mu_j}\,t), \tag{22}$$

où les $L_p(z)=\dfrac{1}{p\,!}e^z\left(\dfrac{d}{dz}\right)^p(e^{-z}z^p)$ sont les polynômes de Laguerre.

Cela posé, la $\zeta$-fonction d'Epstein par rapport à $L$ se definit par

$$\zeta_L(s)=\sum_{l,j=1}^{\infty}\lambda_{l,j}^{-s},\ \text{pour Re. } s>n-1. \tag{23}$$

Nous pouvons la comparer avec la $\zeta$-fonction d'Epstein par rapport à $\mathcal{L}$ sur $M$:

$$\zeta_M(s)=\sum_{l,j=1}^{\infty}\mu_j^{-s},\ \text{pour Re. } s>\frac{n-1}{2}. \tag{24}$$

Nous obtenons une équation fonctionnelle entre elles

$$\zeta_L(s)=2^{-s}\zeta\left(s\,;\,\frac{1}{2}\right)\zeta_M\left(\frac{s}{2}\right),\ \text{pour Re. } s>n-1. \tag{25}$$

Il est connu (voir [3]) que le produit $\Gamma\left(s-\dfrac{n-1}{2}\right)\zeta_M(s)$ se prolonge comme une fonction entière de $s$. Par conséquent, le produit $(s-1)\cdot\Gamma\left(\dfrac{s-n+1}{2}\right)\zeta_L(s)$ le fait également.

## Références


[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic: Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Archive for Rat. Mech. Anal., **34**, 361–379 (1969).

[2] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, et F. G. Tricomi: Higher Transcendental Functions. McGraw-Hill.

[3] S. Minakshisundaram et A. Pleijel: Eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian Manifolds. Canadian J. Math., 242–256 (1949).

[4] N. Shimakura: Quelques exemples des $\zeta$-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre. Proc. Japan Acad., **45**(10), 866–871 (1969).