38. *Notes sur l'Intégration. I*

— *Quelques Propriétés des Fonctions d'Intervalle*

Par Shizu ENOMOTO
Institut de Mathématiques, Université d'Ôsaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., March 12, 1954)

Le but principal de ces Notes est l'extension de l'intégration au sens de Denjoy (ou Denjoy-Perron) pour l'espace euclidien d'une dimension à l'espace euclidien de plusieurs dimensions. Les études dans cette direction ont été déjà données par MM. M. Krzyański,[1] J. Ridder,[2] S. Kempisty[3] et M. Romanowski.[4] Comme totalisation d'une fonction de point définie dans l'intervalle contenu dans l'espace euclidien de n dimensions, ces auteurs ont fait appel à la notion d'une fonction d'intervalle. Nous allons aussi employer cette notion, mais, en outre, les valeurs des fonctions d'intervalle dans nos cas peuvent être approchées par celles des intégrales au sens de Lebesgue. D'abord, dans cette Note, nous commençons par l'étude préliminaire sur les propriétés des fonctions d'intervalle.

Termes et Notations. Considérons un espace euclidien E_n à n dimensions composé des points $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Etant donné un système $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n$ de $2n$ nombres réels tels que $a_i < b_i$ pour $i=1, 2, \dots, n$, nous appellerons intervalle $I=[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n]$ de l'espace E_n l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $a_i \leq x_i \leq b_i$ pour $i=1, 2, \dots, n$ et carré l'intervalle tel que $b_1-a_1=b_2-a_2=\dots=b_n-a_n$. Nous appellerons le plus grand des nombres $b_1-a_1, b_2-a_2, \dots, b_n-a_n$ la norme, $n(I)$, de l'intervalle I, et le produit $(b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n)$ l'aire, $|I|$, de l'intervalle I. Nous entendrons par $p(I)$ le paramètre de régularité de I, c'est-à-dire le rapport des mesures de l'intervalle I et du plus petit carré contenant I.

Nous entendrons par système élémentaire un nombre fini S d'intervalles $I_1, I_2, \dots, I_m$ contenus dans E_n.

Soit $F(I)$ une fonction d'intervalle définie pour tous les intervalles I contenus dans un intervalle R de E_n. Nous disons que $F(I)$ est fini-additive, lorsque

$$F(I)=F(I_1)+F(I_2)$$

quelle que soit la décomposition de I en deux intervalles I_1 et I_2.

Nous disons qu'une fonction d'intervalle $F(I)$ définie dans R est continue (α) à un point p de R quand elle tend vers zéro avec l'aire d'intervalle I tel que $n(I) \leq \alpha$ et $I \ni p$. Pour tout ensemble A contenu dans R, nous entendrons par $F_A(I)$ la fonction d'intervalle telle que $F_A(I)$ est égale à $F(I)$ quand I contient un point de l'ensemble A et nulle dans le cas contraire.

Nous entendrons par $\mu(A)$ la mesure d'ensemble A mesurable au sens de Lebesgue. Nous écrirons l'intégrale d'une fonction de point $f(p)$ sommable dans un ensemble A par la notation $(L)\int_A f(p)\,dp$.

Définition 1. Nous considérons une fonction de point $f(p)$ définie dans l'intervalle R de E_n telle qu'il existe une fonction d'intervalle F(I) fini-additive et une suite $M_n (n=1, 2, \dots)$ des ensemble mesurables au sens de Lebesgue, satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(p)$ est sommable au sens de Lebesgue dans M_n pour $n=1, 2, \dots$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = R$.

3) Pour tout ensemble M_n et tout $\varepsilon>0$, on peut fair correspondre un nombre $\delta(n, \varepsilon)>0$ tel que les conditions suivantes:

3.1) $I_i \frown M_n \neq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$

3.2) $\mu\left(\sum_{i=1}^{m} I_i - M_n\right) < \delta(n, \varepsilon)$

3.3) $n(I_i) \leq \dfrac{1}{n} \quad (i=1, 2, \dots, m)$

entraînent

$$\left| \sum_{i=1}^{m} F(I_i) - \sum_{i=1}^{m} (L)\int_{I_i \frown M_n} f(p)dp \right| < \varepsilon,$$

quel que soit le système élémentaire S composé d'intervalles $I_1, I_2, \dots, I_m$ contenus dans R. Nous désignons par $\mathfrak{D}_R$ la famille de telles fonctions.

Deux théorèmes suivants pourront être regardés comme point de départ de nos études sur $\mathfrak{D}_R$:

Théorème 1. Soit F(I) une fonction d'intervalle fini-additive définie dans l'intervalle R et satisfaisant à la condition telle que la limit $F'_s(p)$ existe pour tout point p de R, où $F'_s(p)$ est la limit du rapport $F(I)/|I|$ pour l'intervalle I, tel que $I \ni p$, lorsque $n(I)$ tend vers zéro. Alors la fonction $f(p)=F'_s(p)$ définie dans R appartient à $\mathfrak{D}_R$.

Mais il est remarquable que pour une fonction d'intervalle F(I) fini-additive définie dans l'intervalle R et telle que $F'_s(p)$ existe sauf pour un seul point n'appartient pas toujours à $\mathfrak{D}_R$. En effect, nous pouvons le voir par un exemple très simple comme il suit:

Exemple. Soit F(I) la fonction d'intervalle fini-additive définie dans l'intervalle $R=[0, 1; 0, 1]$ telle que

$$F(I) = (L)\int_c^d dy (L)\int_a^b \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\,dx$$

pour tout intervalle $\mathrm{I}=[a, b; c, d]$ contenu dans R. On a alors

$$F'_s(x, y)=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

pour tout point (x, y) de R différent de $(0, 0)$, mais pour le point $p_0=(0, 0)$, F(I) n'est continue (α) pour aucun nombre $\alpha>0$; par conséquent, $F'_s(p_0)$ n'existe pas.

En outre, pour une fonction d'intervalle F(I), si l'on ajoute la propriété de continuité (α), nous avons le théorème suivant:

Théorème 2. Soit F(I) une fonction d'intervalle fini-additive, définie dans R et satisfaisant à la condition: $F'_s(p)$ existe pour tout point p de R sauf tout au plus une infinité dénombrable N et pour tout point p de N il existe un nombre positive $\alpha=\alpha(p)$ tel que F(I) est continue (α) au point p. Alors la fonction

$$f(p)=\begin{cases} F'_s(p) & \text{pour } p \text{ tel que } p \bar{\in} \mathrm{N} \text{ et } p \in \mathrm{R} \\ \text{un nombre arbitraire} & \text{pour } p \in \mathrm{N} \end{cases}$$

appartient à $\mathfrak{D}_{\mathrm{R}}$.

En particulier, au cas où $n=1$, on a le

Théorème 3. Pour l'intervalle R de E_1, $\mathfrak{D}_{\mathrm{R}}$ coïncide avec la famille des fonctions intégrables au sens de Denjoy (ou Denjoy-Perron) dans R.

Soit $f(p)$ une fonction de point appartenant à $\mathfrak{D}_{\mathrm{R}}$. Soient encore F(I) une fonction d'intervalle et M_n l'ensemble, donnés dans la définition de $\mathfrak{D}_{\mathrm{R}}$ pour la fonction $f(p)$. Pour une telle fonction d'intervalle F(I), nous pouvons énoncer les Théorèmes suivants:

Théorème 4. La fonction d'intervalle F(I) est uniquement déterminée par $f(p)$.

Théorème 5. Pour tout ensemble $\mathrm{M}_n (n=1, 2, \ldots)$, $\mathrm{F}_{\mathrm{M}_n}(\mathrm{I})$ est continue$\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème 6. A tout ensemble M_n et tout $\varepsilon>0$, on peut faire correspondre un nombre $\eta(n, \varepsilon)$ tel que les conditions

$$\sum_{i=1}^{m} |\mathrm{I}_i|<\eta(n, \varepsilon) \quad \text{et} \quad |\mathrm{I}_i| \leq \frac{1}{n} (i=1, 2, \ldots, m)$$

entraînent

$$\sum_{i=1}^{m} |\mathrm{F}_{\mathrm{M}_n}(\mathrm{I}_i)| < \varepsilon,$$

quel que soit le système élémentaire S composés d'intervalles I_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ contenus dans R.

Soit $\mathrm{F}_\rho(p)$ la limite du rapport $\mathrm{F}(\mathrm{I})/|\mathrm{I}|$ pour l'intervalle I, tel que $\mathrm{I} \ni p$ et $p(\mathrm{I}) \geq \rho$, lorsque $|\mathrm{I}|$ tend vers zéro, pour le nombre positive ρ. Nous entendons par $\mathrm{F}'(p)$ la limit de $\mathrm{F}_\rho(p)$ lorsque ρ tend vers zéro.

Théorème 7. $F'(p)$ exist presque partout aux points p de R et elle est égale à $f(p)$.

Pour une classe des fonctions de $\mathfrak{D}_R$, on obtient le résultat suivant qui est plus précis que Théorème 6:

Théorème 8. Si, pour $\delta(n, \varepsilon)$ donné dans 3) de la définition 1, nous pouvons prendre $\delta_n \times \varepsilon$, où le nombre δ_n est déterminé par l'ensenmble M_n seul, alors nous avons $F'_s(p) = f(p)$ presque partout dans R.

Les fonctions étudiées dans Théorèmes 1 et 2 satisfont à cette condition.

Enfin, ajoutons encore deux théorèmes concernant à l'allure des fonctions de point qui appartient à $\mathfrak{D}_R$.

Théorème 9. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de point appartenant à $\mathfrak{D}_R$; alors f_1+f_2 aussi appartient à $\mathfrak{D}_R$ et

$$F(I) = F_1(I) + F_2(I)$$

pour tout intervalle I contenu dans R, où $F_1(I), F_2(I)$ et $F(I)$ sont les fonctions d'intervalles données dans la définition de $\mathfrak{D}_R$ pour f_1, f_2 et f respectivement.

Théorème 10. Soit $f(p)$ une fonction appartenant à $\mathfrak{D}_R$ et $g(p)$ une fonction de point telle que $g(p)$ est égale à $f(p)$ presque partout aux points p de R; alors $g(p)$ appartient aussi à $\mathfrak{D}_R$. Si, de plus, $F(I)$ est la fonction d'intervalle attachée à $f(p)$ dans la définition de $\mathfrak{D}_R$, il en est de même de $g(p)$.

Références

1) M. Krzyański: Sur les fonctions absolument continues généralisées de deux variables, C. R. de Paris, 198 (1934).

2) J. Ridder: Über Denjoy-Perron Integration von Funktionen zweier Variablen, C. R. de Varsovie, 28 (1935).

3) S. Kempisty: [1] Sur les fonctions absolument continues d'intervalle, Fund. Math., 27 (1936); [2] Fonctions d'intervalle non additives, Actuarités Scientifiques et Industrielles (1939).

4) M. Romanowski: [1] Intégrale de Denjoy dans l'espace abstrait, Recueil Math. Moscou, 8 (1941); [2] Intégrale de Denjoy dans l'espace à n dimensions, ibid., 9 (1941).