61. *Notes sur l'Intégration. II*
— *Une Propriété du Recouvrement Fermé de l'Intervalle*

Par Shizu ENOMOTO
Institut de Mathématiques, Université d'Ôsaka
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., April 12, 1954)

Dans cette Note, nous allons étudier une propriété d'une suite des ensembles fermés, où la somme couvre un intervalle contenu dans un espace euclidien d'une ou plusieurs dimensions. La propriété est importante pour voir une structure d'une fonction d'intervalle qui est l'intégrale au sens de Denjoy (ou Denjoy-Perron) dans l'espace euclidien d'une dimension. En outre, elle jouera un rôle capital dans la théorie de l'intégrale, extension de cette intégrale aux espaces de plusieurs dimensions, que nous donnerons dans la Note prochaine.

Dans cette Note, nous gardons, sauf indication contraire, la terminologie et les notations de la Note I.*)

Soit J_0 un intervalle contenu dans l'espace euclidien E_1 d'une dimension. Soit $M_m(m=1, 2, \ldots)$ une suite des ensembles fermés telle que $\sum_{m=1}^{\infty} M_m = J_0$ et $M_m \supseteq M_{m'}$ pour m, m' tels que $m > m'$. Alors nous avons le théorème suivant:

Théorème 1. Pour $M_m(m=1, 2, \ldots)$ et pour une suite des nombres positifs $\varepsilon_m(m=1, 2, \ldots)$, tout intervalle J contenu dans J_0 possède la propriété suivante qu'on désignera par (A_1): il existe une suite des ensembles fermés $F_{n_i m_i}(J)$ $(i=1, 2, \ldots)$, de total J, possédant les propriétés telles que;

1) $n_i < m_i < n_{i+1}$ pour $i=1, 2, \ldots,$
2) $F_{n_i m_i}(J) \subseteq M_{m_i}$ pour $i=1, 2, \ldots,$
3) $F_{n_i m_i}(J) \supseteq F_{n_{i'} m_{i'}}(J)$ pour i, i' tels que $i > i'$,
4) si $F_{n_i m_i}(J)$ n'est pas identique à J, il possède la propriété (B_1) pour $M_m\,(m=1, 2, \ldots)$ et $\varepsilon_m\,(m=1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire la suite des intervalles $J'_j\,(j=1, 2, \ldots)$ contigus à l'ensemble formé des points de $F_{n_i m_i}(J)$ et d'extrémités de J se peut classifier en un nombre $m_i - n_i + 1$ des suites des intervalles $J_{kj}\,(j=1, 2, \ldots)$, où $n_i \leqq k \leqq m_i$ et J_{kj}, pouvant être vide, satisfont aux conditions suivantes pour tout indice k;

4.1) $\sum_{j=1}^{\infty} | J_{kj} | < \varepsilon_k,$

*) Shizu Enomoto: Notes sur l'Intégration. I — Quelques Propriétés des Fonctions d'Intervalle, Proc. Japan Acad., **30**, 176 (1954).

4.2) $(J_{kj})^0 \frown M_k = 0$ pour $j=1, 2, \dots,$ où $(J_{kj})^0$ est l'intérieur de J_{kj}.

4.3) L'un au moins des extrémités d'intervalle J_{kj} appartient à M_k pour $j=1, 2, \dots$.

Ensuite, dans l'espace euclidien E_n de n dimensions, nous donnons un théorème qui revient au même Théorème 1 au cas où $n=1$. D'abord, nous commençons par quelques définitions des notations.

Nous écrivons par $\mu_n(A)$ la mesure au sens de Lebesgue d'ensemble A contenu dans E_n. Par définition de E_n, nous pouvons le considérer comme l'ensemble produit $E_1 \times E_{n-1}$ de E_1 par E_{n-1}, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x_1, y_{n-1}) dont le premier élément x_1 est un point quelconque de E_1, et le second y_{n-1} un point quelconque de E_{n-1}. Pour un ensemble A contenu dans E_n, nous entendons par $p_{r_1}(A)$ la première projection de A sur E_1 qui est l'ensemble composé des points x_1 de E_1 pour lesquels il existe un point y_{n-1} de E_{n-1} tel que (x_1, y_{n-1}) appartient à A. Nous entendons de même par $p_{r_2}(A)$ la seconde projection de A sur E_{n-1}. Pour un point x_1 de E_1, nous écrivons par A^{x_1} l'ensembles des points (x_1, y_{n-1}) tels que $(x_1, y_{n-1}) \in A$. Pour un point y_{n-1} de E_{n-1}, nous écrivons de même par $A^{y_{n-1}}$ l'ensemble des points (x_1, y_{n-1}) tels que $(x_1, y_{n-1}) \in A$.

Soit R_0 l'intervalle contenu dans E_n. Soit encore, comme le cas où $n=1$, $M_m\,(m=1, 2, \dots)$ une suite des ensembles fermés telle que $\sum_{m=1}^{\infty} M_m = R_0$ et $M_m \supseteq M_{m'}$ pour m, m' tels que $m > m'$.

Théorème 2. Pour $M_m\,(m=1, 2, \dots)$ et une suite des nombres positifs $\varepsilon_m\,(m=1, 2, \dots)$, tout intervalle R contenu dans R_0 possède la propriété (A_n), c'est-à-dire il existe une suite des ensembles fermés $F_{n_i m_i}(R)$ $(i=1, 2, \dots)$ contenus dans R possédant les propriétés suivantes;

1) $n_i < m_i < n_{i+1}$ pour $i=1, 2, \dots,$

2) $F_{n_i m_i}(R) \subseteq M_{m_i}$ pour $i=1, 2, \dots,$

3) $F_{n_i m_i}(R) \supseteq F_{n_{i'} m_{i'}}(R)$ pour i, i', tels que $i > i'$,

4) nous posons $Y = \sum_{i=1}^{\infty} p_{r_2} F_{n_i m_i}(R)$ et $Z = p_{r_2}(R) - Y$, alors, nous avons

4.1) $\mu_{n-1}(Z) = 0$,

4.2) pour tout point y_{n-1} de Y, si $(F_{n_i m_i}(R))^{y_{n-1}}$ n'est pas identique à $R^{y_{n-1}}$, il possède la propriété (B_1) pour $(M_m)^{y_{n-1}}\,(m=1, 2, \dots)$ et $\varepsilon_m\,(m=1, 2, \dots)$.

4.3) pour tout point y_{n-1} de Y, on a $\sum_{n=1}^{\infty} (F_{n_i m_i}(R))^{y_{n-1}} = R^{y_{n-1}}$.