94. *Notes sur l'Intégration. III*
—Théorème de Fubini

Par Shizu ENOMOTO
Institut de Mathématiques, Université d'Ôsaka
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., June 12, 1954)

Dans cette Note, nous allons donner une extension de l'intégration au sens de Denjoy (ou Denjoy-Perron) pour l'espace euclidien E_2 de 2-dimensions. L'intégrale qui sera donnée dans la suite pour l'espace E_2 aura trois principales propriétés suivantes:

a) Soient $f(x, y)$ une fonction de point qui est intégrable sur un intervalle R contenu dans l'espace E_2, et F(I) l'intégrale de notre sens de $f(x, y)$ sur un intervalle I contenu dans R. Alors, $F'(x, y)$[1] existe presque partout aux points (x, y) de R et elle est égale à $f(x, y)$.

b) Propriété correspondante au Théorème de Fubini sur l'intégrale multiple des fonctions sommables au sens de Lebesgue, traduite pour les intégrales de notre sens.

c) Soit F(I) une fonction d'intervalle, fini-additive, définie dans un intervalle R contenu dans l'espace E_2 et telle que $F'_s(x, y)$[1] existe pour tout point (x, y) de R, alors la fonction de point $F'_s(x, y)$ (définie dans R) est intégrable à notre sens, et F(R) est l'intégrale de notre sens de la fonction $F'_s(x, y)$ sur l'intervalle R.

Parmi quelques propriétés de l'intégration qui est donnée dans cette Note, nous allons surtout étudier ici celle qui se rattache à *b*), puisque *a*), *c*)[2] avec d'autres propriétés fondamentales sont déjà montrées dans la Note I.

Pour cela, d'abord, nous allons montrer une propriété (Théorème 1) de l'intégrale au sens de Denjoy pour l'espace d'une dimension en examinant les relations avec l'intégrale au sens de Lebesgue. Cette propriété elle-même caractérise l'intégrale au sens de Denjoy dans l'espace E_1. En outre, elle nous fait connaître que les valeurs des fonctions d'intervalles, qui sont données comme l'intégrale au sens de Denjoy, peuvent être approchées aussi bien qu'on veut par celles des intégrales au sens de Lebesgue. L'intégrale qui est donnée dans cette Note pour l'espace E_2, est une extension de cette propriété.

1) Pour la définition, voir la Note I: Shizu Enomoto: Notes sur l'Intégration. I—Quelques Propriétés des Fonctions d'Intervalle, Proc. Japan Acad., **30**, 176 (1954).

2) Pour la fonction de point $F'_s(x, y)$ appartient à $\mathfrak{D}_R$. Or, en outre, nous voyons que pour la fonction $F'_s(x, y)$ on peut choisir une suite *monotone ascendante* des ensembles *fermés* comme une suite M_n $(n=1, 2, \dots)$ dans la Définition 1 de la Note I.

Dans cette Note, nous gardons, sauf indication contraire, la terminologie et les notations de les Notes I et II.[3]

Soit $f(x)$ une fonction de point qui est intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle R contenu dans l'espace euclidien E_1 d'une dimension. Nous écrivons l'intégrale au sens de Denjoy de la fonction $f(x)$ sur un intervalle I contenu dans R par la notation $(D)\int_I f(x)\,dx$.

Puisque $f(x)$ est intégrable au sens de Denjoy, il existe une suite $A_n (n=1, 2, \ldots)$ des ensembles satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = R$.

2) $A_n \supseteq A_{n'}$ pour n, n' tels que $n > n'$.

3) La fonction d'intervalle $F(I)$ qui est définie comme $(D)\int_I f(x)\,dx$ pour tout intervalle $I \subseteq R$, est absolument continue au sens restreint[4] sur l'ensemble A_n pour tout n, c'est-à-dire quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta(n, \varepsilon) > 0$ tel que, pour tout système élémentaire[5] composé d'intervalles $\{I_i\}$ dont les extrémités appartiennent à A_n et contenus dans R,

$$\sum_i |I_i| < \eta(n, \varepsilon) \quad \text{entraîne} \quad \sum_i O(F\,;\, I_i) < \varepsilon,$$

où $O(F; I_i)$ désigne la borne supérieure des valeurs $|F(I)|$ pour tous les intervalles I contenus dans I_i.

Nous en pouvons tirer immédiatement le

Lemme 1. Pour une fonction de point $f(x)$ qui est intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle R contenu dans l'espace E_1, il existe une suite des ensembles fermés F_n $(n=1, 2, \ldots)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(x)$ est sommable au sens de Lebesgue sur F_n pour $n=1, 2, \ldots$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} F_n = R$.

3) $F_n \supseteq F_{n'}$ pour n, n' tels que $n > n'$.

4) Pour la suite des intervalles J_{nj} $(j=1, 2, \ldots)$ contigus à l'ensemble formé des points de F_n et d'extrémités de R, on a

$$\sum_{j=1}^{\infty} O(F\,;\, J_{nj}) < +\infty,$$

3) Shizu Enomoto: Notes sur l'Intégration. II—Une Propriété du Recouvrement Fermé de l'Intervalle, Proc. Japan Acad., **30**, 289 (1954).

4) Pour la définition, voir S. Saks: Théorie de l'Intégrale (1933).

5) Nous dirons qu'une système d'intervalles est élémentaire, lorsqu'il est composé d'un nombre fini d'intervalles non empiétants.

où l'on pose $F(I)=(D)\int_I f(x)dx$ pour tout intervalle $I\subseteq R$.

En vertu du Lemme 1 et du Théorème 1 de la Note II, on a le

Théorème 1. Soit $f(x)$ une fonction de point qui est intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle R contenu dans l'espace E_1. Soit F(I) la fonction d'intervalle qui est définie comme $(D)\int_I f(x)dx$ pour tout intervalle $I\subseteq R$. Alors, pour toute suite ε_n $(n=1, 2, \dots)$ des nombres positifs tels que $\varepsilon_n \downarrow 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n=0$ avec la condition: $\varepsilon_n<\varepsilon_{n'}$ pour n, n' tels que $n>n'$, nous avons une suite monotone ascendante F_n $(n=1, 2, \dots)$ des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(x)$ est sommable au sens de Lebesgue dans F_n pour $n=1, 2, \dots$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n=R$.

3) A tout ensemble F_n,

$$I_i\cap F_n\neq 0 \quad \text{pour tout } i$$

entraîne

$$\left|\sum_i F(I_i)-\sum_i (L)\int_{I_i\cap F_n} f(x)\,dx\right|<\varepsilon_n,$$

quel que soit le système élémentaire composé d'intervalles $\{I_i\}$ contenus dans R.

Ce Théorème 1 entraîne deux théorèmes suivants.

Théorème 2. Soit $f(x)$ une fonction de point qui est intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle R contenu dans l'espace E_1. Soit F(I) la fonction d'intervalle qui est définie comme $(D)\int_I f(x)dx$ pour tout intervalle $I\subseteq R$. Alors, nous pouvons choisir une suite monotone ascendante F_n $(n=1, 2, \dots)$ des ensembles fermés pour laquelle on a:

1) $F(I)=\lim\limits_{n\to\infty} (L)\int_{I\cap F_n} f(x)dx$ pour tout intervalle $I\subseteq R$.

2) Pour toute suite d'intervalles $\{I_i\}$ n'empiétant pas les uns sur les autres et dont il existe un nombre n_0 tel que $I_i\cap F_{n_0}\neq 0$ pour tout $i=1, 2, \dots$, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty}\{\lim_{n\to\infty} (L)\int_{I_i\cap F_n} f(x)\,dx\}=\lim_{n\to\infty}\{\sum_{i=1}^{\infty}(L)\int_{I_i\cap F_n} f(x)\,dx\}.$$

En particulier, si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} I_i$ est un intervalle I, nous avons $F(I)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}F(I_i)$.

Théorème 3. Soit $f(x)$ une fonction qui est intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle R contenu dans l'espace E_1. Soit F(I) l'intégrale de la fonction sur un intervalle I contenu dans R. Alors, il existe une suite monotone ascendante F_n $(n=1, 2, \dots)$ des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(x)$ est sommable au sens de Lebesgue sur F_n pour $n=1, 2, \ldots$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} F_n = R$.

3) Pour tout ensemble F_n et tout $\varepsilon>0$, on peut faire correspondre un nombre $\delta(n, \varepsilon)>0$ tel que les conditions:

3.1) $I_i \cap F_n \neq 0$ pour tout i

3.2) $\mu_1(\sum_i I_i - F_n) < \delta(n, \varepsilon)$

entraînent

$$\left| \sum_i F(I_i) - \sum_i (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

quel que soit le système élémentaire composé d'intervalles $\{I_i\}$ contenus dans R.

Définition 1. Etant donnée dans un intervalle R contenu dans l'espace E_2 une fonction de point quelconque $f(x, y)$, nous dirons qu'elle est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans R, lorsqu'il existe une fonction d'intervalle F(I) fini-additive et une suite[6] F_n $(n=1, 2, \ldots)$ des ensembles fermés, satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(x, y)$ est sommable au sens de Lebesgue sur F_n pour $n=1, 2, \ldots$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} F_n = R$.

3) Pour tout ensemble F_n et tout $\varepsilon>0$, on peut faire correspondre un nombre $\delta(n, \varepsilon)>0$ tel que les conditions:

3.1) $I_i \cap F_n \neq 0$ pour tout i

3.2) $\mu_2(\sum_i I_i - F_n) < \delta(n, \varepsilon)$

3.3) $n(I_i)$[1] $\leq \frac{1}{n}$ pour tout i

entraînent

$$\left| \sum_i F(I_i) - \sum_i (L) \iint_{I_i \cap F_n} f(x, y)\, dx\, dy \right| < \varepsilon,$$

quel que soit le système élémentaire composé d'intervalles $\{I_i\}$ contenus dans R. Nous dirons que F(I) est l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de la fonction $f(x, y)$ sur I pour tout intervalle I contenu dans R. Nous écrivons l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de la fonction $f(x, y)$ sur I par la notation $(\mathfrak{D}) \iint_I f(x, y)\, dx\, dy$.

Puisque cette définition elle-même montre qu'une fonction de point $f(x, y)$ intégrable $(\mathfrak{D})$ sur R appartient à $\mathfrak{D}_R$,[7] nous pouvons

6) Remarquons qu'on peut choisir la suite F_n $(n=1, 2, \ldots)$ qui est *monotone ascendante*.

7) Pour la définition, voir la Définition 1 de la Note I.

voir quelques propriétés fondamentales des fonctions intégrables $(\mathfrak{D})$ en vertu des théorèmes montrés dans la Note I pour des fonctions appartenant à $\mathfrak{D}_{\mathrm{R}}$.

La définition de l'intégrale $(\mathfrak{D})$ définie pour l'espace euclidien E_2 de 2-dimensions, peut être considérée comme une extension de celle de l'intégrale au sens de Denjoy définie pour l'espace euclidien E_1 d'une dimension. En effet, en plus du Théorème 3 d'en haut et du Théorème 3 de la Note I, nous avons le

Théorème 4. Soit $f(x, y)$ une fonction de point définie dans un intervalle $\mathrm{R}=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ contenu l'espace E_2 et pour laquelle il existe une fonction $g(x)$ intégrable au sens de Denjoy sur $[a_1, b_1]$ telle que

$$f(x, y)=g(x) \text{ pour tout } y \in [a_2, b_2].$$

Alors, la fonction $f(x, y)$ est intégrable $(\mathfrak{D})$ sur R. De plus on a

$$(\mathfrak{D}) \iint_{\mathrm{R}} f(x, y)\, dx\, dy=(b_2-a_2)\,\{(\mathrm{D})\int_{a_1}^{b_1} g(x)\, dx\}.$$

En outre, pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ définie dans l'espace E_2 nous pouvons établir le résultat principal correspondant à celui qui est connu sous le nom de Théorème de Fubini sur l'intégrale multiple pour les fonctions sommables au sens de Lebesgue.

Théorème 5 (*Théorème de Fubini*). Soit $f(x, y)$ une fonction de point intégrable $(\mathfrak{D})$ sur un intervalle $\mathrm{R}=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ contenu dans l'espace E_2. Alors, elle jouit des propriétés suivantes:

1) Pour presque toutes les valeurs de x de l'intervalle $[a_1, b_1]$ la fonction $f(x, y)$, considérée comme fonction de y dans l'intervalle $[a_2, b_2]$, est intégrable au sens de Denjoy sur $[a_2, b_2]$.

2) Pour presque toutes les valeurs de y de l'intervalle $[a_2, b_2]$ la fonction $f(x, y)$, considérée comme fonction de x dans l'intervalle $[a_1, b_1]$, est intégrable au sens de Denjoy sur $[a_1, b_1]$.

3) $$(\mathfrak{D}) \iint_{\mathrm{R}} f(x, y)\, dx\, dy=(\mathrm{D})\int_{a_1}^{b_1} \{(\mathrm{D})\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy\}\, dx$$
$$=(\mathrm{D})\int_{a_2}^{b_2} \{(\mathrm{D})\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx\}\, dy.$$

En outre, nous pouvons énoncer les propositions suivantes:

4) Il existe une suite monotone ascendante A_n $(n=1, 2, \ldots)$, de presque total R, des ensembles fermés telle qu'elle jouit de

$$(\mathrm{D})\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_{\mathrm{A}_n^x} f(x, y)\, dy$$ [8]

8) Nous posons $(\mathrm{L})\int_{\mathrm{A}_n^x} f(x, y)\, dy=(\mathrm{L})\int_{p_{r_2}(\mathrm{A}_n^x)} f(x, y)\, dy$, $(\mathrm{L})\int_{\mathrm{B}_n^y} f(x, y)\, dx$ $=(\mathrm{L})\int_{p_{r_1}(\mathrm{B}_n^y)} f(x, y)\, dx$. Or, pour les définitions de A_n^x, B_n^y, $p_{r_2}(\mathrm{A}_n^x)$ et $p_{r_1}(\mathrm{B}_n^y)$, voir la Note II.

pour presque toutes les valeurs de x de l'intervalle $[a_1, b_1]$.

5) Il existe une suite monotone ascendante B_n $(n=1, 2, \ldots)$, de presque total R, des ensembles fermés telle qu'elle jouit de

$$(\mathrm{D})\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{L})\int_{B_n^y} f(x, y)\, dx$$ [8]

pour presque toutes les valeurs de y de l'intervalle $[a_2, b_2]$.

Rapport à la dérivation. Soit F(I) une fonction d'intervalle fini-additive définie sur un intervalle R contenu dans l'espace E_2. Si $F_s'(x, y)$ existe pour tout point (x, y) de R, on a

$$\begin{aligned} F(I) &= (\mathrm{D})\int_{a_1}^{b_1} \{(\mathrm{D})\int_{a_2}^{b_2} F_s'(x, y)\, dy\}\, dx \\ &= (\mathrm{D})\int_{a_2}^{b_2} \{(\mathrm{D})\int_{a_1}^{b_1} F_s'(x, y)\, dx\}\, dy \end{aligned}$$

pour tout intervalle $I=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ contenu dans R, puisque la fonction de point $F_s'(x, y)$ est intégrable sur tel intervalle I.[2]

Mais il est remarquable que pour une fonction d'intervalle F(I) fini-additive définie sur un intervalle R contenu dans l'espace E_2 et telle que $F_s'(x, y)$ existe sauf pour un seul point, tel résultat ne subsiste pas toujours. En effet, nous pouvons le voir par un exemple très simple comme il suit:

Soit F(I) la fonction d'intervalle fini-additive définie dans l'intervalle $R=[0, 1; 0, 1]$ telle que

$$F(I) = (\mathrm{L})\int_{a_2}^{b_2} \left\{(\mathrm{L})\int_{a_1}^{b_1} \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\, dx\right\} dy$$

pour tout intervalle $I=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ contenu dans R.[9] Alors on a

$$(\mathrm{L})\int_0^1 \left\{(\mathrm{L})\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\, dx\right\} dy = \frac{\pi}{4}$$

$$(\mathrm{L})\int_0^1 \left\{(\mathrm{L})\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\, dy\right\} dx = -\frac{\pi}{4},$$

par suite, pour cette fonction le Théorème de Fubini ne subsiste plus.

Enfin, nous montrons le

Théorème 6. Soit $f(x, y)$ une fonction de point qui est intégrable $(\mathfrak{D})$ sur un intervalle R contenu dans l'espace E_2. Soit F(I) l'intégrale de la fonction $f(x, y)$ sur un intervalle I contenu dans R. Alors F(I) est continue: c'est-à-dire quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un nombre $\eta(\varepsilon)>0$ tel que, pour tout intervalle I contenu dans R,

$$|I|<\eta(\varepsilon) \text{ entraîne } |F(I)|<\varepsilon.$$

Quant à la démonstration de deux derniers théorèmes mentionnés plus haut, nous la devons principalement aux théorèmes de la Note II.

---

9) Voir Exemple de la Note I.