165. *Theorie der 2-Cohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern*[1]

Von Mikao MORIYA

Institut der Mathematik, Okayama Universität, Japan

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Nov. 12, 1954)

Im folgenden bezeichnet k durchweg einen diskret bewerteten perfekten (kommutativen) Körper und K eine endlich-separable Erweiterung über k; die Hauptordnung von k bzw. K sei mit $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ bezeichnet. Ferner sei $\bar{K}$ eine endlich-separable Erweiterung über K mit $\bar{\mathfrak{O}}$ als Hauptordnung; $\bar{\mathfrak{P}}$ sei das Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$.[2] Dann ist die *Differente* $\mathfrak{D}(K/k)$ von K/k bekanntlich kein Nullideal, weil K über k separabel ist; der Exponent von $\mathfrak{D}(K/k)$ in bezug auf $\bar{\mathfrak{P}}$ heisse der $\bar{\mathfrak{P}}$-*Exponent* der Differente von K/k.

Nun versteht man unter einem *normalen 2-Cozyklus* f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ eine bilineare Abbildung des Ringes $\mathfrak{O}$ in $\bar{\mathfrak{O}}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) Für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ gilt
$$f(X, Y)=f(Y, X).$$
2) Für beliebige Elemente X_i, Y_i $(i=1, 2)$ aus $\mathfrak{O}$ gilt
$$f(X_1+X_2, Y_1+Y_2)=\sum_{i,j=1}^{2} f(X_i, Y_j).$$
3) Für beliebige Elemente X, Y, Z aus $\mathfrak{O}$ gilt
$$Xf(Y, Z)+f(X, YZ)=f(XY, Z)+Zf(X, Y).$$
4) Für ein beliebiges Element x bzw. X aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ gilt
$$f(x, X)=0.$$

Ferner versteht man unter einer *normalen 1-Kette* g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ eine lineare Abbildung von $\mathfrak{O}$ in $\bar{\mathfrak{O}}$, welche für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$ bzw. X aus $\mathfrak{O}$ stets den Gleichungen
$$g(x)=0 \qquad \text{und} \qquad g(xX)=xg(X)$$
genügen. Setzt man dann für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$
$$\delta g(X, Y)=Yg(X)+Xg(Y)-g(XY),$$
so ist δg offenbar ein normaler 2-Cozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$; δg

---

1) Hier sind nur die Hauptergebnisse dargelegt; eine ausführliche Darstellung der vorliegenden Note erscheint demnächst in Mathematical Journal of Okayama University, **5**, No. 1.

2) Unter einem Primideal versteht man ein vom Null- und Einheitsideal verschiedenes Primideal, also gibt es in $\bar{\mathfrak{O}}$ nur ein einziges Primideal.

heisst der *2-Corand* von g.

Sind nun f_1, f_2 normale 2-Cozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$, so definiert man die Summe f_1+f_2 von f_1 und f_2 auf folgende Weise:

$$(f_1+f_2)(X, Y)=f_1(X, Y)+f_2(X, Y),$$

wo X, Y unabhängig alle Elemente aus $\mathfrak{O}$ durchlaufen. Offenbar bildet die Gesamtheit $Z^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ aller 2-Cozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ bei obiger Summenbildung einen Modul mit $\bar{\mathfrak{O}}$ als Linksmultiplikatorenbereich; dabei bildet die Gesamtheit $B^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ der 2-Coränder aller normalen 1-Ketten von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ einen $\bar{\mathfrak{O}}$-Untermodul von $Z^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$. Die Faktorgruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ von $Z^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ nach $B^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ heisst die *normale 2-Cohomologiegruppe* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$; jedes Element aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ heisst eine *normale 2-Cohomologieklasse* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$. Ferner heisst $B^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ die Nullklasse und ist mit 0 bezeichnet.

Es sei K_1 ein Zwischenkörper zwischen k und K, und $\mathfrak{O}_1$ die Hauptordnung von K_1. Dann heisst ein normaler 2-Cozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ „*zerfällt in* $\mathfrak{O}_1$", wenn die Einschränkung von f auf $\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o}$ gleich ist dem 2-Corand einer normalen 1-Kette von $\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$. Es ist klar, dass alle 2-Cozyklen aus einer normalen 2-Cohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ in $\mathfrak{O}_1$ zerfallen, wenn sie irgendeinen in $\mathfrak{O}_1$ zerfallenden 2-Cozyklus enthält; wir können also von einer in $\mathfrak{O}_1$ *zerfallenden 2-Cohomologieklasse* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ sprechen. Nun gilt zunächst:

Satz 1. *Es bezeichne $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}_1; \bar{\mathfrak{O}})$ diejenige $\bar{\mathfrak{O}}$-Untergruppe von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$, die aus allen und nur allen in $\mathfrak{O}_1$ zerfallenden, normalen 2-Cohomologieklassen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ besteht. Dann ist $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}_1; \bar{\mathfrak{O}})$ $\bar{\mathfrak{O}}$-isomorph zur normalen 2-Cohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_1; \bar{\mathfrak{O}})$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_1$ über $\bar{\mathfrak{O}}$.*

Es sei $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})=U_0 \supsetneqq U_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq U_i \supsetneqq \cdots$ eine absteigende Folge von den $\bar{\mathfrak{O}}$-Untergruppen aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ von der Art, dass für jedes $i(0 \leqq i)$ die Faktorgruppe U_i/U_{i+1} ein einfacher $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul ist. Bricht dann die obige Folge im endlichen so ab, dass das letzte Glied die Nullklasse wird, so heisst die Folge eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Kompositionsreihe von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$. Dabei ist die Länge einer beliebigen $\bar{\mathfrak{O}}$-Kompositionsreihe von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ eine Invariante der Cohomologiegruppe, welche ich einfach die $\bar{\mathfrak{O}}$-*Länge* von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ nennen will.

Die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ heisse „*einfach normal über* $\mathfrak{o}$", wenn $\mathfrak{O}$

aus $\mathfrak{o}$ durch Ringadjunktion eines einzigen Elementes entsteht. Existiert ferner eine aufsteigende Folge $\mathfrak{o}=\mathfrak{O}_0\subsetneqq\mathfrak{O}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathfrak{O}_s=\mathfrak{O}$ von den Hauptordnungen $\mathfrak{O}_i(i=0,1,\ldots,s)$ derart, dass für jedes $i(1\leqq i\leqq s)\mathfrak{O}_i$ über $\mathfrak{O}_{i-1}$ einfach normal ist, so heisse $\mathfrak{O}$ „*normal über* $\mathfrak{o}$".

Nun kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{O}$ normal über $\mathfrak{o}$. Dann besitzt die normale 2-Cohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$ eine endliche $\overline{\mathfrak{O}}$-Basis; d.h. es existieren endlich viele 2-Cohomologieklassen $C_1,C_2,\ldots,C_n$ aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$ von der Art, dass jede normale 2-Cohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{O}}$ von der Form $\sum_{i=1}^{n}A_iC_i(A_i\in\overline{\mathfrak{O}},\ i=1,2,\ldots,n)$ ist, und dass aus einer Relation $\sum_{i=1}^{n}A_iC_i=0$ stets $A_1C_1=A_2C_2=\cdots=A_nC_n=0$ folgen. Für eine beliebige normale 2-Cohomologieklasse C von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{O}}$ ist das annullierende Ideal[3] von C aus $\overline{\mathfrak{O}}$ stets ein Teiler der Differente $\mathfrak{D}(K/k)$ von K/k. Ferner ist die $\overline{\mathfrak{O}}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$ gleich dem $\overline{\mathfrak{P}}$-Exponenten von $\mathfrak{D}(K/k)$. Wenn insbesondere $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$ einfach normal ist, dann ist $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$ ein zyklischer $\overline{\mathfrak{O}}$-Modul; dabei ist das annullierende Ideal aus $\overline{\mathfrak{O}}$ einer beliebigen erzeugenden 2-Cohomologieklasse von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$ gleich $\mathfrak{D}(K/k)$.*

Ferner gilt noch:

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{O}$ normal über $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}_1$ eine solche Zwischenhauptordnung zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$, dass $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{O}_1$ auch normal ist. Bezeichnet dann $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o},\mathfrak{O}_1;\overline{\mathfrak{O}})$ die Gesamtheit aller in $\mathfrak{O}_1$ zerfallenden, normalen 2-Cohomologieklassen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{O}}$, so gilt folgende $\overline{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation:*

$$(*)\qquad H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})\big/H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o},\mathfrak{O}_1;\overline{\mathfrak{O}})\cong H^{(2)}(\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}}).$$

In der Relation $(*)$ aus Satz 3 ist $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o},\mathfrak{O}_1;\overline{\mathfrak{O}})$ nach Satz 1 $\overline{\mathfrak{O}}$-isomorph zur normalen 2-Cohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_1;\overline{\mathfrak{O}})$. Bezeichnet man also den Quotientenkörper von $\mathfrak{O}_1$ mit K_1 und die $\overline{\mathfrak{P}}$-Exponenten der Differenten von K/k und K/K_1 bzw. mit u und u_1, so folgt aus der Relation $(*)$, dass die $\overline{\mathfrak{O}}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$ gleich $u-u_1$ ist; nach dem bekannten *Schachtelungssatz* über Differenten[4] ist $u-u_1$ gleich dem $\overline{\mathfrak{P}}$-Exponenten der Differente von K/k. Ferner folgt noch, dass $H^{(2)}(\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$ eine endliche $\overline{\mathfrak{O}}$-Basis besitzt und infolgedessen das annullierende Ideal einer beliebigen

3) Dies ist das Ideal, welches aus allen C annullierenden Elementen aus $\overline{\mathfrak{O}}$ besteht.

4) Vgl. etwa H. Hasse: Zahlentheorie, 316–317 (1950) (Berlin).

normalen 2-Cohomologieklasse von $\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{O}}$ ein Teiler der Differente von K_1/k ist.

Wenn $\mathfrak{O}$ nicht notwendig über $\mathfrak{o}$ normal ist, dann betrachten wir eine K enthaltende, endlich-separable galoissche Erweiterung $\overline{K}$ über k; die Hauptordnung von $\overline{K}$ sei mit $\overline{\mathfrak{O}}$ bezeichnet. Dann ist $\overline{\mathfrak{O}}$ sicher normal sowohl über $\mathfrak{o}$ als über $\mathfrak{O}$.[5] Setzt man nun in der Relation $(*)$ aus Satz 3

$$\overline{\mathfrak{O}}=\overline{\mathfrak{O}},\ \mathfrak{O}=\overline{\mathfrak{O}}\quad \text{und}\quad \mathfrak{O}_1=\mathfrak{O},$$

so beweist man, dass die normale 2-Cohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$ ein $\overline{\mathfrak{O}}$-Modul mit endlicher $\overline{\mathfrak{O}}$-Basis ist, und dass die $\overline{\mathfrak{O}}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$ gleich ist dem $\overline{\mathfrak{P}}$-Exponenten der Differente von K/k.

Nun betrachten wir die normale 2-Cohomologiegruppe $[H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\mathfrak{O})]$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{O}$, und wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}$ das Primideal aus $\mathfrak{O}$. Man beweist dann, dass $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$ der durch $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\mathfrak{O})$ erzeugte $\overline{\mathfrak{O}}$-Modul ist. Bezeichnet man ferner mit e die Verzweigungsordnung von $\overline{K}$ über K, so gibt die $\overline{\mathfrak{O}}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\overline{\mathfrak{O}})$, dividiert durch e, den $\mathfrak{P}$-Exponenten der Differente von K/k an. Hieraus schliesst man folgenden

Satz 4. *Die normale 2-Cohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\mathfrak{O})$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{O}$ besitzt eine endliche $\mathfrak{O}$-Basis; das annullierende Ideal aus $\mathfrak{O}$ einer beliebigen 2-Cohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{O}$ ist stets ein Teiler der Differente von K/k. Ferner ist die $\mathfrak{O}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\mathfrak{O})$ gleich dem $\mathfrak{P}$-Exponenten der Differente von K/k.*

Weiter kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 5. *Es sei K_1 ein Zwischenkörper zwischen k und K, und $\mathfrak{O}_1$ sei die Hauptordnung von K_1. Bezeichnet dann $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o},\mathfrak{O}_1;\mathfrak{O})$ diejenige $\mathfrak{O}$-Untergruppe von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\mathfrak{O})$, die aus allen in $\mathfrak{O}_1$ zerfallenden 2-Cohomologieklassen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{O}$ besteht, so gilt die folgende $\mathfrak{O}$-Isomorphierelation:*

$$H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o};\mathfrak{O})\big/H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o},\mathfrak{O}_1;\mathfrak{O})\cong H^{(2)}(\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o};\mathfrak{O}).$$

5) Vgl. etwa M. Moriya: Theorie der Derivationen und Körperdifferenten, Math. Journ., Okayama Univ., **2**, 128–129 (1953).