192. *Sur les Espaces Complets et Régulièrement Complets. II*

Par Kinjirô KUNUGI, M.J.A.

(Comm. Dec. 13, 1954)

1. Dans la Note "Sur les Espaces Complets et Régulièrement Complets. I",[1] nous avons introduit la notion des espaces rangés complets qui est une généralisation des espaces métriques complets. En effet, pour qu'un espace métrique soit complet il faut et il suffit qu'il le soit lorsqu'il est considéré comme un espace rangé. Mais, d'autre part, d'après un théorème de *A*. Tychonoff,[2] tout espace localement bicompact est homéomorphe à un ensemble de points d'un espace R_τ des fonctions $y=f(x)$ à valeurs contenues dans l'intervalle: $0\leq y\leq 1$, définie pour tous les éléments x d'un ensemble τ de la puissance assez élevée. De là, on peut voir facilement que tout espace localement bicompact peut être regardé comme un espace rangé complet. Donc, notre théorème I 3[3] englobe l'énoncé suivant: dans un espace localement bicompact, ou dans un espace métrique complet, tout ensemble ouvert non vide est de seconde catégorie.[4]

2. Considérons ensuite les axiomes de séparation pour les espaces rangés complets. Nous avons déjà donné deux exemples des espaces rangés complets qui sont non métrisables. Remarquons qu'il existe des espaces rangés complets qui sont partout irréguliers (donc des espaces non uniformisables).[5] En voici un exemple:

Exemple 3 (Urysohn).[6] Considérons le plan euclidien à deux dimensions, dont les points p peuvent être exprimés par leurs coordonnées $x, y: p=(x, y)$. Modifions la topologie habituelle à la manière suivante. Soit $p_0=(x_0, y_0)$ un point quelconque. Étant donné un entier non-négatif n $(n=0, 1, 2, \dots)$, désignons par $U_n(p)$ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan dont deux coordonnées x, y satisfont à deux conditions suivantes:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<1/(n+1)^2, \quad y \neq y_0 \text{ sauf le cas où } x=x_0.$$

Pour le plan muni de cette topologie (qui est évidemment irrégulière partout), prenons comme $\mathfrak{V}_n$ $(n=0, 1, 2, \dots)$ la famille de tous

1) Proc. Japan Acad., **30**, No. 7, 553-556 (1954).

2) Mathematische Annalen, **102**, 544-561 (1930).

3) Les chiffres désignent le numéro de la Note et celui du paragraphe où le théorème se trouve.

4) Voir p. ex. Bourbaki: Loc. cit., Topologie générale, Chap. IX, p. 76, Théorème 1 (Baire).

5) Bourbaki: Éléments de Mathématiques, III, Topologie générale, Chap. II.

6) M. Fréchet: Les Espaces Abstraits et Leur Théorie Considérée comme Introduction à l'Analyse Générale, 215 (1928) (Paris).

les voisinages $U_n(p)$. On peut voir facilement que cet espace, soit désingé par PU, satisfait à la condition (a) et qu'il est complet dans notre sens (bien qu'il ne soit pas régulièrement complet).

Contrairement au cas des espaces uniformes, l'axiome (D) de Hausdorff pour les espaces rangés n'implique pas la régularité de l'espace.

3. Passons maintenant au problème de complétion.

Définition 1. Étant données deux suites fondamentales $u=\{u_\alpha(p_\alpha)\}, 0\leq\alpha<\omega_{\mu_1}, u_\alpha(p_\alpha)\in\mathfrak{B}_{\gamma'_\alpha}, w=\{w_\beta(q_\beta)\}, 0\leq\beta<\omega_{\mu_2}, w_\beta(q_\beta)\in\mathfrak{B}_{\gamma''_\beta}$ nous disons que w est inférieure ou égale à u, et désignons-le par $w\leq u$, lorsque pour tout $\alpha\,(0\leq\alpha<\omega_{\mu_1})$ il existe un $\beta\,(0\leq\beta<\omega_{\mu_2})$ tel que $w_\beta(q_\beta)\subseteq u_\alpha(p_\alpha)$ et que $\gamma''_\beta\geq\gamma'_\alpha$. Une famille p^* des suites fondamentales sera dite une collection maximale lorsqu'elle satisfait à deux conditions suivantes:

(1) Pour deux suites fondamentales quelconques a, b de p^*, il existe une suite fondamentale c telle qu'on ait à la fois $c\leq a$ et $c\leq b$; (2) il n'existe aucune famille des suites fondamentales qui satisfait à la condition (1) et qui continent p^* comme sous-famille distincte de p^*.

Étant donné un espace R rangé, désignons par S l'ensemble de toutes les collections maximales de R et introduisons d'abord une topologie pour S. Pour ce but, étant donné un point p^* de S, appelons "*coordonnée* de p^*" tout voisinage $v(p)$ d'un point p de R qui est le premier terme d'une suite fondamentale appartenant à p^*. Soient, maintenant, p^* un point quelconque de S et V une de ses coordonnées. Il existe alors, par définition, une suite fondamentale de p^*:

$$(1) \qquad v_0(p_0)\supseteq v_1(p_1)\supseteq\cdots\supseteq v_\alpha(p_\alpha)\supseteq\ldots,\quad 0\leq\alpha<\omega_\mu$$

telle qu'on ait $v_0(p_0)=V$. Soient encore γ le rang de V et un nombre ordinal quelconque tel que $\gamma\leq\beta<\omega_\nu$. Désignons par $W(\beta, V, p^*)$ la somme de (p^*) et l'ensemble $E(\beta, V, p^*)$ de tous les points q^* de S qui satisfont à la condition suivante: il existe un rang μ $(\beta\leq\mu<\omega_\nu)$ et une coordonnée D de q^* tels que, pour toute coordonnée C de p^*, il existe un point x de C et un voisinage $V(x)$ de x jouissant de la propriété: $D\subseteq V(x)\subseteq V$; $V(x)\in\mathfrak{B}_\gamma$. Prenons tout $W(\beta, V, p^*)$ comme voisinage du point p^* dans l'espace S.

Nous allons montrer que la topologie ainsi introduite dans l'espace S satisfait aux axiomes (A), (B) et (C) de Hausdorff. L'axiome (A) y est évidemment satisfait puisque $W(\beta, V, p^*)$ contient le point p^*. Toutefois, l'ensemble $E(\beta, V, p^*)$ qu'on a défini plus haut ne contient pas toujours le point p^* (voir l'exemple 4 (II, 4) qu'on donne plus bas).

Deuxièmement, S satisfait à l'axiome (B). Soient, en effet, $W(\beta_1, V_1, p^*)$ et $W(\beta_2, V_2, p^*)$ deux voisinages de p^*. Il existe alors deux suites fondamentales u_1, u_2 de p^* dont les premiers termes sont V_1 et V_2 respectivement. Puisque p^* est une collection maximale, il existe alors une suite fondamentale v de $p^*: v_0(p_0) \supseteq v_1(p_1) \supseteq \cdots \supseteq v_\alpha(p_\alpha) \supseteq \cdots$, $0 \leq \alpha < \omega_\nu$, telle qu'on a à la fois $v \leq u_1$, $v \leq u_2$. Il existe donc un nombre α_1 tel que $v_{\alpha_1}(p_{\alpha_1}) \subseteq V_1$ dont le rang est au moins égal à celui de V_1 et un α_2 tel que $v_{\alpha_2}(p_{\alpha_2}) \subseteqq V_2$ et dont le rang est au moins égal à celui de V_2. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Soit γ_{α_2} le rang de $v_{\alpha_2}(p_{\alpha_2})$. Prenons un nombre β tel que $\beta \geq \mathrm{Max}(\beta_1, \beta_2, \gamma_{\alpha_2})$.

D'autre part, la suite $v_{\alpha_2}(p_{\alpha_2}) \supseteq v_{\alpha_2+1}(p_{\alpha_2+1}) \supseteq \cdots$ est évidemment fondamentale qui appartient à p^*. Donc $V = v_{\alpha_2}(p_{\alpha_2})$ est une coordonnée de p^*. Or, nous pouvons considérer le voisinage $W(\beta, V, p^*)$ de p^* qui satisfait, en vertu de la définition, à $W(\beta, V, p^*) \subseteq W(\beta_1, V_1, p^*) \cap W(\beta_2, V_2, p^*)$. L'espace S satisfait donc à l'axiome (B).

Troisièmement, considérons l'axiome (C). Soient p^* un point quelconque de S, $W(\beta, V, p^*)$ un voisinage quelconque de p^* et enfin q^* un point quelconque de $W(\beta, V, p^*)$. Nous allons montrer qu'il existe un voisinage $W(\gamma, U, q^*)$ de q^* qui est contenu dans $W(\beta, V, p^*)$. Si $p^* = q^*$, nous n'avons qu'à poser $W(\gamma, U, q^*) = W(\beta, V, p^*)$. Supposons donc qu'on ait $p^* \neq q^*$, et remarquons qu'il existe, d'après la définition, une coordonnée D de q^* et un rang μ, $\beta \leq \mu < \omega_\nu$ tels que, pour toute coordonnée C de p^*, il existe un point x de C et un voisinage $V(x)$ de x tel que $D \subseteq V(x) \subseteq V$, $V(x) \in \mathfrak{B}_\mu$. Je dis qu'on a alors $W(\beta, D, q^*) \subseteq W(\beta, V, p^*)$ de sorte qu'on peut poser $\gamma = \beta$, $U = D$, pour qu'on ait $W(\gamma, U, q^*) \subseteq W(\beta, V, p^*)$. En effet, soit r^* un point quelconque de $W(\beta, D, q^*)$. Si $r^* = q^*$, r^* appartient à $W(\beta, V, p^*)$ vu la supposition. Si $r^* \neq q^*$, il existe une coordonnée D_1 de r^* et un rang μ_1, $\beta \leq \mu_1 < \omega_\nu$ tels que, pour toute coordonnée C_1 de q^*, il existe un point x_1 de C_1 et un voisinage $V_1(x_1)$ de x_1 satisfaisant à $D_1 \subseteq V_1(x_1) \subseteq D$, $V_1(x_1) \in \mathfrak{B}_{\mu_1}$. Donc, il existe une coordonnée D_1 de r^* et un rang $\mu (\beta \leq \mu < \omega_\nu)$ tels que, pour toute coordonnée de C de p^*, il existe un point x de C et un voisinage $V(x)$ de x jouissant de $D_1 \subseteq D \subseteq V(x) \subseteq V$ et de $V(x) \in \mathfrak{B}_\mu$, c'est-à-dire $r^* \in W(\beta, V, p^*)$, c.q.f.d.

4. Avant d'aller plus loin, nous précisons les circonstances par quelques exemples.

Exemple 4. Prenons comme R un sous-espace de N_+ considéré dans l'exemple 2 (I, 3). Nous adoptons la même topologie de N_+, mais cette fois, supposons que R est constitué par les nombres rationnels seuls. Le voisinage $V_n(p)$ d'un point p de R est l'ensemble de tous les nombres rationnels r satisfaisant à l'inégalité: $p \leq r < p + 1/(n+1)$. Comme la famille $\mathfrak{B}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, prenons tous les voisinages $V_n(p)$; ils sont conséquemment de rang n.

À tout voisinage $V_n(p)$ de p, faisons correspondre l'ensemble $V_n^*(p)$ de tous les points x de N_+ qui satisfont à $p \leq x < p + 1/(1+n)$. Par suite, $V_n^*(p)$ est un voisinage du point p de l'espace N_+ du rang n. D'autre part, si deux voisinages $V_n(p)$, $V_m(q)$ sont en relation $V_n(p) \subseteq V_m(q)$, nous avons évidemment $V_n^*(p) \supseteq V_m^*(q)$. Donc, si une suite des voisinages $v: v_0(p_0) \supseteq v_1(p_1) \supseteq \cdots \supseteq v_n(p_n) \cdots$ est fondamentale dans l'espace R, la suite $v_0^*(p_0) \supseteq v_1^*(p_1) \supseteq \cdots$ est nécessairement fondamentale dans l'espace N_+. Donc, il existe un et un seul point $\bar{p}$ de N_+ appartenant à $\bigcap v^*(p_n)$. Appelons ce point $\bar{p}$ l'image de la suite fondamentale v. D'autre part, soit p^* une collection maximale de R. Pour deux suites fondamentales u et v de p^*, il existe une suite fondamentale w telle qu'on a à la fois $w \leq u$ et $w \leq v$. Donc, les images de u, v et de w doivent coïncider. À la collection maximale p^* de R correspond donc une et une seule image $\bar{p}$ des suites fondamentales qui appartiennent à p^*.

Inversement, soit $\bar{p}$ un point quelconque de N_+. Il existe alors au moins une suite fondamentale $v_0^*(p_0) \supseteq v_1^*(p_1) \supseteq \cdots$ dont tous les points $p_0, p_1, \ldots$ sont rationnels. Posons $v_n(p_n) \supseteq v_n^*(p_n) \cap R$. Alors, $v: v_0(p_0) \supseteq v_1(p_1) \supseteq \cdots$ est une suite fondamentale de R. Soit p^* la famille de toutes les suites fondamentales de cette sorte ($\bar{p}$ étant fixé). Il est facile de voir que, pour deux suites fondamentales u, v de cette famille il existe une, soit w, de la même famille telle qu'on ait à la fois $w \leq u$, $w \leq v$. D'autre part si une suite fondamentale u n'appartient pas à cette famille, l'image de u sera distincte de $\bar{p}$ et par suite il n'existe aucune suite fondamentale w qui satisfait en même temps à $w \leq u$ et à $w \leq v$ pour une suite v de la famille. Donc, la famille est une collection maximale de R. Ce résultat montre bien qu'à tout point $\bar{p}$ de N_+, il existe une et une seule collection maximale de R dont l'image est $\bar{p}$. *La correspondance entre les points de N_+ et les collections maximales de R est donc biunivoque.*

Considérons ensuite la topologie de l'espace S. Soit p^* un point quelconque de S. Alors, chaque coordonnée D de p^* contient une coordonnée C de p^* qui ne possède aucun point x ni aucun voisinage $V(x)$ de x contenant D. Donc, *p^* n'appartient à aucun ensemble $E(\beta, V, p^*)$.* Si q^* appartient à $E(\beta, V, p^*)$, on a $p^* \neq q^*$ et par suite $\bar{q}$ est situé à droite de p, satisfaisant à l'inégalité: $\bar{q} - \bar{p} < 1/(\mu+1)$ pour un $\mu \geq \beta$. Donc, la topologie de S et celle de N_+ coïncident. Nous pouvons ainsi identifier l'espace S avec l'espace N_+.

Or, on sait que l'espace R est complètement régulier, et par conséquent R peut être regardé comme un espace unforme.[7] M. A. Weil a introduit la notion de l'espace complet[8] dans un espace uniforme et il a demontré qu'à tout espace uniforme A on peut associer un espace complet $\bar{A}$ du sens qu'il a defini et tel que A soit isomorphe à un sous-ensemble partout dense de $\bar{A}$. Considérons, maintenant, une suite de points de R: $p_n=-1/n$ $(n=1,2,..)$ et posons $C_n=\{p_n, p_{n+1},\dots\}$. C_n $(n=1,2,\dots)$ forment une suite de Cauchy. Ils déterminent un point limite de la suite p_n $(n=1,2,\dots)$ dans l'espace $\bar{R}$. Cette limite sera distincte de 0, puisque la suite $p_n(n=1,2,\dots)$ diverge dans l'espace R et que $0\in R$. Cet exemple montre bien que notre procédé de complétion est essentiellement différent de celui de M. A. Weil.

Exemple 5. Prenons comme R un sous-espace du plan PU d'Urysohn considéré dans l'exemple 3 (II, 2). Nous adoptons la même topologie de PU. Mais nous supposons que R est constitué par tous les points (x, y) du plan dont deux coordonnées x et y sont tous rationnelles. Tels points seront dits rationnels. Les voisinages $V_n(p)$ d'un point p de R est l'intersection d'un voisinage $W_n(p)$ dans l'espace PU avec l'ensemble R: $V_n(p)=W_n(p)\cap R$. Nous postulons que le rang de $V_n(p)$ est simplement celui de $W_n(p)$. Ainsi R est un espace rangé. À tout voisinage $V_n(p)$ dans R correspond un voisinage $W_n(p)$ et inversement à tout voisinage $W_n(p)$ du point rationnel dans l'espace PU correspond un voisinage $V_n(p)$ de p dans l'espace R, de sorte qu'on ait dans deux cas $V_n(p)=W_n(p)\cap R$. Par cette correspondance l'inclusion: $V_n^1(p)\supseteq V_m^2(q)$ entraîne $W_n^1(p)\supseteq W_m^2(q)$ et vice versa. À toute suite fondamentale u de R correspond donc une suite fondamentale u^* de PU dont l'intersection de tous les termes est un point de PU. À toute collection maximale de R correspond un point $\bar{p}$ de PU d'une manière biunivoque. Il est facile de voir que l'espace S peut être identifié avec l'espace PU au moyen de cette correspondance. D'autre part, nous pourrons dire que le procédé de M. A. Weil est inapplicable à R parce que R est partout irrégulier.

(à suivre)

---

7) A. Weil: Sur les Espaces à Structure Uniforme et sur la Topologie Gènérale, Actual. Sci. Ind., 17 (1938) (Paris).

8) Ibid., p. 19.