4. *Une Remarque sur la Connexion Affine Symêtrique*

Par Shôshichi KOBAYASHI

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Jan. 12, 1955)

1. Soit G un groupe de Lie connexe et α un automorphisme de G dont le carré α^2 est l'automorphisme identique. L'ensemble des points de G qui sont invariants par α est un sous-groupe fermé de G que nous noterons par H_α. Soit H un sous-groupe fermé de G qui est contenu dans H_α et qui contient la composante connexe de l'identité de H_α. L'espace homogène G/H est, par définition, l'espace homogène *symétrique* [1], [3]. Le but de la présente note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Soit $V=G/H$ un espace homogène symétrique compact. Supposons que le nombre des composantes connexes de H soit fini. Alors il existe sur V une connexion riemannienne symétrique invariante par un sous-groupe compact K de G, K opérant transitivement sur V.*

Corollaire. *Si le revêtement universel d'un espace homogène symétrique $V=G/H$ est compact, il existe sur V une connexion riemannienne symétrique invariante par un sous-groupe compact K de G, K opérant transitivement sur V.*

Démonstration. D'après un théorème de Montgomery [2], il existe un sous-groupe compact K de G opérant transitivement sur V. Soit L l'intersection de K et de H. Evidemment on a $V=K/L$.

Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, et $\mathfrak{l}$ les algèbres de Lie de G, de H, de K et de L respectivement. L'hypothèse que G/H est un espace homogène symétrique entraîne l'existence d'un sous-espace vectoriel $\mathfrak{v}$ de $\mathfrak{g}$ tel que [3, p. 55]

(1) $$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{v} \qquad \mathfrak{h}\frown\mathfrak{v}=0$$

(2) $$[\mathfrak{h},\mathfrak{v}]\subset\mathfrak{v}$$

(3) $$[\mathfrak{v},\mathfrak{v}]\subset\mathfrak{h}.$$

On voit immédiatement les propriétés suivantes de $\mathfrak{v}$:

(4) $$\mathfrak{k}=\mathfrak{l}+\mathfrak{v} \qquad \mathfrak{l}\frown\mathfrak{v}=0$$

(5) $$[\mathfrak{l},\mathfrak{v}]\subset\mathfrak{v}$$

(6) $$[\mathfrak{v},\mathfrak{v}]\subset\mathfrak{l}.$$

Soit ds^2 une métrique riemannienne sur V invariante par K. Alors la connexion riemannienne définie par ds^2 est symétrique [3, p. 52]; c'est-à-dire la dérivée covariante du tenseur de courbure de Riemann est zéro, c.q.f.d.

Ainsi le problème topologique d'un espace homogène symétrique compact G/H, où H n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, se réduit au problème de l'espace riemannien symétrique.

Références

[1] E. Cartan: La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs, Mém. Sci. Math., Fasc. XLII (1930).

[2] D. Montgomery: Simply connected homogeneous spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **1**, 467–469 (1950).

[3] K. Nomizu: Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. Journ. Math., **76**, 33–65 (1954).