17. *Fonctions Presque Périodiques du Type Spécial. I*[1]

Par Shin-ichi MATSUSHITA
Osaka Cité Université

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 18, 1955)

§ 1. L'étude des fonctions presque périodiques vectorielles a été inaugurée par MM. S. Bochner et J. von Neumann, en 1935;[2] d'ailleurs plus récemment, MM. D. A. Raïkov, A. Weil, H. Cartan, R. Godement, I. E. Segal, L. H. Loomis, etc. ont réussi à établir la théorie de l'analyse harmonique générale dans les groupes localement compacts.[3] Cette Note va d'une part étudier les fonctions *presque périodiques* (*p. p.*) définies dans un groupe et ayant ses valeurs dans l'espace des mesures de Radon sur l'espace de caractères, et d'autre part établir quelques rapports entre les fonctions *p. p.*, ainsi définies, et l'analyse harmonique généralisée dans les groupes topologiques.

Pour cela, il ne sera question que de groupes *localement compacts* (*l. c.*): quand on parlera d'un groupe G sans préciser ce fait, il sera sous-entendu que G est considéré *l. c.*, toutefois G ne sera supposé abélien qu'à faire mention du contraire. Rappelons que *l'espace de caractères* de G, noté V_0, est un ensemble des fonctions élémentaires (continues de type positif) et leur limites faibles distinctes de la fonction identiquement nulle.[4] Munissant de la topologie de la convergence compact dans G, V_0 est un espace *l. c.*, et si G est abélien, V_0 n'est alors autre chose que le groupe dual $\hat{G}$ de G.

Dans ce qui suit, nous rappelons les propriétés fondamentales desquelles nous ferons usage sans démonstrations, qui sont assez répandus aujourd'hui:

Soient $L^0(\cdot)$ l'espace vectoriel normé des fonctions continues à support compact sur un espace *l. c.* $(\cdot)$, pour la topologie uniforme, et $L_\infty(\cdot)$ l'adhérence uniforme de $L^0(\cdot)$; si $(\cdot)$ est non compact, $L_\infty(\cdot)$ se compose des fonctions tendant vers 0 au point à l'infini. Soient

---

1) Les définitions et notations que nous allons utiliser ici s'en réfèrent à mes Mémoires précédants, S. Matsushita: [1] *Sur le théorème de Plancherel*, [2] *Sur quelques types des théorèmes de dualité*, **I** et **II**, Proc. Japan Acad., **30** (1954), [3] *Analyse harmonique*, **I** et **II**, C. R. Acad. Sci., Paris, 955–957, 1056–1057 (1953).

2) S. Bochner-J. von Neumann: *Almost periodic functions in groups*, **II**, Trans. Amer. Math. Soc., **37**, 21–50 (1935).

3) Pour une bibliographie complète, voir G. Mackey: *Functions on locally compact groupes*, Bull. Amer. Math. Soc., **56**, 385–412 (1950).

4) R. Godement: *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes*, Trans. Amer. Math. Soc., **63**, 1–84 (1948) et S. Matsushita [1].

$\mathfrak{M}$ un espace vectoriel topologique des mesures de Radon complexes définies sur V_0, espace muni de la *topologie vague*, et $\mathfrak{M}^1$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$ formé par mesures bornées; $\mathfrak{M}$ est alors un espace localement convexe séparé, dual à $L^0(V_0)$ pour la topologie de convergence simple dans celui-ci, $\mathfrak{M}^1$ un espace de Banach pour la *topologie ultraforte*, dual à $L_\infty(V_0)$.

Or, on sait que $\mathfrak{M}$ n'est pas complet en général pour la structure uniforme vague, mais il est *topologiquement complet* au sens de M. J. von Neumann,[5] comme un espace de Montel (car une partie vaguement bornée de $\mathfrak{M}$ est toujours relativement compacte).[6] Conformément aux définitions de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}^1$, on peut poser quelques notions de la presque-périodicité définie dans G comme suit:

i) $\mathfrak{A}(G)$ *espace vectoriel des fonctions p. p.* (au sens de MM. S. Bochner et J. von Neumann), *ayant ses valeurs dans l'espace* $\mathfrak{M}$;

ii) $\mathfrak{A}^1(G)$ *espace de Banach des fonctions p. p. ayant ses valeurs dans* $\mathfrak{M}^1$; d'autre part, on désignera par $A(G)$ l'espace de Banach des fonctions numériques continues *p. p.* pour la norme uniforme, qui forme simultanément une algèbre de Banach involutive commutative comme on l'a déjà mentionné dans ma Note précédente.[7] Ici, la topologie de $\mathfrak{A}(G)$ (ou $\mathfrak{A}^1(G)$) est naturellement adoptée de telle manière qu'elle soit compatible avec celle du produit topologique $\mathfrak{M}_b^G$ (ou resp. $\mathfrak{M}_b^{1G}$),[8] en munissant de la topologie de convergence uniforme dans G.

Remarque importante — Il y a lieu de signaler soigneusement une différence importante entre les fonctions *p. p.* études actuellement par MM. S. Bochner et Neumann et notre $\mathfrak{A}(G)$; $\mathfrak{M}$ ne satisfait pas à l'axiome (2) de la Définition 2*b* de M. J. von Neumann,[9] donc ses conséquences sont évidemment en défaut pour l'espace $\mathfrak{A}(G)$ — par exemple, une fonction de $\mathfrak{A}(G)$ peut posséder un ensemble non dénombrable de ses matrices d'expansion $\neq 0$ (contrairement à ce qui a lieu dans la théorie des fonctions *p. p.* ayant ses valeurs dans l'espace métrisable).[10]

§ 2. Bornons-nous maintenant à considérer le premier espace

5) C'est-à-dire, toute partie fermée, totalement bornée est compacte, J. von Neumann: *On complete topological space*, Trans. Amer. Math. Soc., **37** (1935), Définition 10. Puisque toute partie totalement bornée est bornée, tout espace de Montel et espace métrisable sont *top. complet.*

6) N. Bourbaki: [1] *Intégration*, Livre 6 (1952), Prop. 9, Chap. 3, § 2.

7) S. Matsushita: *Loc. cit.* [2].

8) $\mathfrak{L}_b^G (=\mathfrak{B}(G, \mathfrak{L}))$ désigne l'espace des applications bornées de G dans $\mathfrak{L}$.

9) J. von Neumann: *Loc. cit.* C'est-à-dire, $\bigcap_{i=1}^\infty \omega_i=(0)$ pour une famille dénombrable des voisinages ω_i de 0 dans $\mathfrak{M}$.

10) Voir l'Exemple qui se trouve dans b), Cor. du Théorème 1; si G est compact, $\alpha(x)=\chi(x)d\chi$ est dans $\mathfrak{A}(G)$, mais la valeur moyenne $m[\chi\cdot\alpha]$ ne s'annule pour tout $\chi(x)$ (car $\hat{G}$ est discret et $d\chi=d\varepsilon_\chi$, masse$+1$ en χ).

$\mathfrak{A}(G)$ (nous traiterons parfois mesures bornées, toutefois elles seront toujours considérées comme éléments de $\mathfrak{M}$, en d'autres termes, $\mathfrak{M}^1$ sera supposé muni de la topologie faible sur lui-même, que nous continuerons à appeler $\mathfrak{M}^1$). Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, μ lui-même et son produit $f(x)\cdot\mu$ par toute fonction $f \in A(G)$ appartiennent à $\mathfrak{A}(G)$. De façon générale, nous avons le

Théorème 1. *Pour qu'une application* $\alpha(x) \in \mathfrak{M}_b^G$ (*ou* $\in \mathfrak{M}_b^{1G}$) *soit presque périodique (c'est-à-dire,* $\in \mathfrak{A}(G)$*), il faut et il suffit que la fonction numérique* $\langle \hat{f}, \alpha\rangle(x)$;[11]

$$\langle \hat{f}, \alpha\rangle(x) = \int_{V_0} \hat{f}(\varphi) d\alpha_{(x)}(\varphi), \tag{2.1}$$

appartient à $A(G)$ *pour toute* $\hat{f}$ *de* $L^0(V_0)$ (*ou resp. de* $L_\infty(V_0)$).

Pour démontrer ce fait, la condition étant évidemment suffisante (d'après la définition de presque-périodicité pour la topologie vague), montrons qu'elle est nécessaire. Puisque l'application $\alpha(x) \rightarrow \langle \hat{f}, \alpha\rangle(x)$ est uniformément continue pour tout $x \in G$, on peut appliquer à cette application un théorème de MM. S. Bochner et J. von Neumann (en considérant celle comme une fonction numérique uniformément continue définie sur $\mathfrak{A}(G)$).[12]

De ce théorème, on déduit aussitôt:

Corollaire 1. *G étant abélien, les trois propositions suivantes sont équivalentes; a) G est compact,*

b) pour la mesure de Haar $d\chi$ et caractères $\chi(x)$ de G, $\chi(x)d\chi \in \mathfrak{A}(G)$,

c) pour toute mesure μ de $\mathfrak{M}^1$, sa transformée de Fourier-Stieltjes appartient à $A(G)$.

Il suffit de considérer une mesure $d\mu_g$ pour $g \in L^0(G)$ de type positif; en effet, $g(x) = \int_{\hat{G}} \chi(x) d\mu_g(\chi) = \int_{\hat{G}} \chi(x)\hat{g}(\chi)d\chi$, où $\hat{g}$ est la transformée de Fourier de g.[13]

Corollaire 2. *On suppose qu'une fonction $f(x)$ de $A(G)$, G étant abélien, soit telle que, pour une mesure bornée $d\mu(\chi)$ sur $\hat{G}$, $f(x) = \int_{\hat{G}} \chi(x) d\mu(\chi)$ (transformée de Fourier-Stieltjes). Alors* i) $\alpha_{(x)}(\chi) = \chi(x)d\mu(\chi)$ *appartient à* $\mathfrak{A}(G)$, ii) $\alpha_{(x)}(\chi)$ *est de la forme;*

$$\alpha_{(x)}(\chi) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(x) d\varepsilon_{\chi_i}(\chi), \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < +\infty, \tag{2.2}$$

où ε_{χ_0} est une mesure ponctuelle $+1$ placée en $\chi_0 \in \hat{G}$.

---

11) $\langle\hat{f}, \alpha\rangle(x)$ est la valeur de fonctionnelle $\alpha(x)$ sur $\hat{f}$, c'est-à-dire $=[\alpha_{(x)}](\hat{f})$.

12) S. Bochner et J. von Neumann: *Loc. cit.*, Théorème 5.

13) S. Matsushita [1], Théorème A; R. Godement: *Loc. cit.*

i) L'application $f \in A(G) \to f_g(x) = \int_G g(y) f(xy)\, dy$ est uniformément continue pour toute $g \in L^0(G)$, donc f_g est aussi *p. p.* sur G.

$$\int_G g(y) f(xy) dy = \int_G g_x(y) f(y) dy = \int_{\hat{G}} (\hat{g}_x)(\chi) d\mu(\chi)^{14)}$$

$$= \int_{\hat{G}} \hat{g}(\chi) \chi(x) d\mu(\chi) \quad (= f_g(x) \in A(G)),$$

où $g_x(\cdot) = g(x^{-1}\cdot)$ et $\hat{g}$ désigne la transformée de Fourier de g; lorsque g parcourt l'espace $L^0(G)$, ses transformées $\hat{g}$ forment un sous-espace dense de $L_\infty(\hat{G})$, d'où résult l'assertion i) en tenant compte du Théorème 1.

ii) Soit $\sum \beta_i \chi_i$ la série de Fourier de f; étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un entier N tel que, pour toute $g \in L^0(G)$ avec $m = \int_G |g(x)|\, dx$, on ait $\|f - \sum_{i=1}^N \gamma_i \chi_i\| < \varepsilon/m$, d'où

$$\left| \int_{\hat{G}} \hat{g}(\chi) [d\mu(\chi) - \sum_{i=1}^N \gamma_i d\varepsilon_{\chi_i}(\chi)] \right|$$

$$= \left| \int_G g(x) [f(x) - \sum_{i=1}^N \gamma_i \chi_i(x)] dx \right| \leqq \|f - \sum_{i=1}^N \gamma_i \chi_i\| \cdot m < \varepsilon.$$

On en conclut que μ est limite vague de la *suite* de combinaisons linéaires finies des mesures ponctuelles, donc μ est de la forme (2.2), dans laquelle $\sum_{i=1}^\infty |\alpha_i| = \int_{\hat{G}} d|\mu| = \|\mu\|$, ce qui est finie.

On va considérer la réciproque de l'assertion c) du Corollaire 1 ci-dessus, c'est-à-dire, si G est tel que toute fonction numérique *p. p.* dans G soit une transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure de $\mathfrak{M}^1$; alors quel type est-il? C'est M. E. Hewitt qui le premier a résolu ce problème.[15]

Théorème 2 (E. Hewitt). *Si G est abélien et toute fonction de $A(G)$ est transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure $\mu \in \mathfrak{M}^1$, alors G et $\hat{G}$ sont groupes finis.*

En effet, d'après le Corollaire 2 ci-dessus, on pourrait poser $\mu = \sum \alpha_i d\varepsilon_{\chi_i}$ avec $\sum |\alpha_i| < \infty$, donc on identifiera l'espace $\mathfrak{M}^1$ avec $L^1(\hat{G}_d)$, espace de Banach des fonctions sommables pour la mesure de Haar $d\chi_d$ sur le groupe dual $\hat{G}_d$ de la *compactification de Bohr*

14) H. Cartan-R. Godement: *Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts*, Ann. Éc. Norm. Sup., **64** (1947), l'égalité (*), n° 9, p. 88.

15) E. Hewitt: *Representation of functions as absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms*, Proc. Amer. Math. Soc., **14** (1953).

$\Phi^0(A(G))$ de G,[16] dont $\hat{G}_a$ est discret et sa mesure de Haar $d\chi_a$ est choisie de manière que chaque point χ_0 de $\hat{G}_a$ porte une masse $+1$, c'est-à-dire $=d\varepsilon_{\chi_0}$: en outre, $A(G) \cong C(\Phi^0(A(G)))$ et donc $C(\Phi^0(A(G)))$ et $L^1(\hat{G}_a)$ sont isomorphes l'un à l'autre par la transformation de Fourier, ce qui montre que $\Phi^0(A(G))$ et $\hat{G}_a$ sont finis en vertu d'un théorème de M. I. E. Segal,[17] d'où l'assertion.

§ 3. Dans tout ce paragraphe, nous nous bornerons au cas où $G=R^n$, groupe additif d'espace numérique à n-dimensions (espace euclidien), dans lequel la mesure de Haar dx est l'élément d'hyper-volume $dx_1dx_2\ldots dx_n$ et toute fonction considérée est de n-variables réelles $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; conformément à la notation de M. L. Schwartz,[18] nous désignerons par $(\mathfrak{D})$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact sur R^n, muni de la topologie définie par M. Schwartz,[19] et par $(\mathfrak{D}')$ l'espace des distributions, dual topologique de $(\mathfrak{D})$. En outre, $(\mathfrak{B}')$ est un sous-espace de $(\mathfrak{D}')$, espace qui se composent des distributions bornées. C'est le dual topologique d'espace $(\mathfrak{D}_{L^1})$, espace muni de la topologie de $L^1(R^n)$ à chacune des dérivées.

Nous considérons maintenant $(\mathfrak{D}_{L^1})$ et son dual $(\mathfrak{B}')$ au lieu de $L^0(\hat{G})$ et de $\mathfrak{M}$ respectivement; à présent, $\hat{G}=R^n$ et $(\mathfrak{D})$ est partout dense dans $(\mathfrak{D}_{L^1})$ comme on le vérifie aisément. Ceci étant, il sera naturel d'étudier, au lieu de $\mathfrak{A}(R^n)$, l'espace vectoriel $\hat{\mathfrak{A}}(R^n)$ des fonctions $p. p.$ définies sur R^n et ayant ses valeurs dans $(\mathfrak{B}')$, espace comme dual de $(\mathfrak{D}_{L^1})$ sur $\hat{G}=R^n$.

D'autre part, soit $(\mathfrak{B}'_{pp})$ l'espace des distributions $p. p.$ au sens de M. Schwartz, c'est-à-dire, distributions α telles que leur translatées $\tau_x\alpha$ forment un ensemble relativement compact ($r. c.$) dans $(\mathfrak{B}')$ quand x décrit R^n. On va démontrer le

Lemme 1. *En posant* $\alpha(x)=\tau_x\alpha$ *pour* $\alpha \in (\mathfrak{D}')$, *pour que* $\alpha(x) \in \hat{\mathfrak{A}}(R^n)$, *il faut et il suffit que* $\alpha \in (\mathfrak{B}'_{pp})$.

Démonstration. $\alpha(x) \in \hat{\mathfrak{A}}(R^n)$ entraîne que l'ensemble $\{\alpha(0+x)\}_{x\in R^n} = \{\alpha(x)\}_{x\in R^n} = \{\tau_x\alpha\}_{x\in R^n}$ est $r. c.$ dans $(\mathfrak{B}')$, d'où résulte $\alpha \in (\mathfrak{B}'_{pp})$. Réciproquement, étant donné un voisinage quelconque ω de 0 dans le produit topologique $(\mathfrak{B}')^{R^n}$, ω un ensemble des $\gamma \in (\mathfrak{B}')^{R^n}$ appliquant uniformément G lui-même dans le voisinage $V_0 \equiv V(B, \varepsilon)$ de 0 dans

16) Pour la définition et la notation de $\Phi^0(A(G))$, voir S. Matsushita: *Loc. cit.* [2]. Voir encore, E. Hewitt: *Linear functionals on almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **74** (1953).

17) I. E. Segal: *The class of functions which are absolutely convergent Fourier transforms*, Acta Sci. Math., Szeged, **12** (1950).

18) L. Schwartz: *Théorie des distributions*, I et II, Hermann & C^{ie}, Paris (1950).

19) Ibid., pp. 67–68.

$(\mathfrak{B}')$, où B désigne un ensemble borné de $(\mathfrak{D}_{L^1})$; l'ensemble $\hat{B}=\{\tau_x B\}_{x\in R^n}$ est alors borné et $V(\hat{B}, \varepsilon)$ contient toutes les translatées $\tau_x\nu$ des $\nu\in V(\hat{B}, \varepsilon)$, car $|\nu(\tau_x f)|=|\tau_{-x}\nu(f)|<\varepsilon$. Or si $\alpha\in(\mathfrak{B}'_{pp})$, on a

$$\{\tau_x\alpha\}_{x\in R^n}\subset\sum_{i=1}^m(\tau_{x_i}\alpha+V(\hat{B}, \varepsilon)),$$

donc pour tout $s\in R^n$,

$$\{\tau_x\tau_s\alpha\}_{x\in R^n}\subset\sum_{i=1}^m(\tau_{x_i}\tau_s\alpha+\tau_s V(\hat{B}, \varepsilon))\subset\sum_{i=1}^m(\tau_{x_i}\tau_s\alpha+V_0).$$

D'où il vient que $\{\tau_x(s)\}_{x\in R^n}\subset\sum_{i=1}^m(\tau_{x_i}\alpha(s)+\omega)$, ce qui prouve le Lemme.

En vertu de ce Lemme, le Théorème 1 peut alors se modifier de la façon suivante:

Théorème 3 (L. Schwartz). *Pour qu'une distribution α soit p. p. au sens de M. L. Schwartz, c'est-à-dire $\alpha\in(\mathfrak{B}'_{pp})$, il faut et il suffit que sa régularisée $\alpha*f$ par toute $f\in(\mathfrak{D})$ appartienne à $A(G)$.*

En effet, $(\mathfrak{D})$ est partout dense dans $(\mathfrak{D}_{L^1})$ et $[\alpha*\check{f}](x)=\alpha_t\cdot\check{f}(x-t)=\tau_x\alpha_t\cdot f(t)=\alpha(x)_t\cdot f(t)(=\langle f, \alpha\rangle(x)$ par la notation dans Thr. 1), où $\check{f}(x)=f(-x)$;[20] en particulier, si α est une mesure, on a $\langle f, \alpha\rangle(x)=$

$$[\alpha*\check{f}](x)=\iint\cdots\int_{R^n}\check{f}(t)d\alpha(x-t)=\iint\cdots\int_{R^n}f(t)\,d\alpha_{(x)}(t).$$

(*à suivre*)

20) Il faut dire cependant que la façon de démontrer la réciproque de Thr. 1 est en défaut pour ce Théorème, car la topologie dual dans $(\mathfrak{B}')$ est forte (par contre, les topologies forte et faible dans $\mathfrak{M}$ sont identifiées), mais si $\alpha*f\in A(R^n)$, les translatées des $\alpha*f$ forment un ensemble *c. r.* dans $(\mathfrak{B}')$ comme on le vérifie directement; pour $f_j\in(\mathfrak{D})$ telles que $f_j\to\delta$ distribution de Dirac dans $(\mathfrak{E}')$, on a $\alpha*f_j\to\alpha$ dans $(\mathfrak{B}')$ et donc $\alpha\in(\mathfrak{B}'_{pp})$.