10. *Sur les Points Singuliers d'une Équation Différentielle Ordinaire du Premier Ordre*

Par Yasutaka SIBUYA

Institut de Mathématiques, Université de Tokyo

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 18, 1955)

1. L'équation différentielle

(1.1) $$xy' = y(\lambda + yf(x, y)),$$

où $f(x, y)$ est une fonction holomorphe pour $x=y=0$, admet si λ est un nombre irrationnel, une solution formelle

(1.2) $$y = z\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn}x^m z^n\},$$

z désignant la fonction Cx^{λ}. M. C. L. Siegel a démontré la convergence de la série (1.2) sous la condition,

$$|(n-1)\lambda + m| > K(m+n)^{-\nu},$$

K et ν étant des nombres positifs, indépendants de m et de n. D'autre part, M. H. Dulac a donné un exemple tel que la série (1.2) diverge. Mais son exemple est artificiel et il y aurait lieu de se demander: *la série (1.2) converge-t-elle si $f(x, y)$ est une fonction rationnelle? La réponse est négative*; c'est ce que nous allons montrer.

2. Considérons l'équation différentielle

(2.1) $$xy' = \lambda y + y^2 + p(x)y^3,$$

où

(2.2) $$p(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + \cdots .$$

En portant l'expression (1.2) dans (2.1), nous obtenons

(2.3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(m+n\lambda)b_{mn}x^m z^n$$
$$= z\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn}x^m z^n\}^2 + p(x)z^2\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn}x^m z^n\}^3.$$

On voit immédiatement

(2.4) $$b_{0k} = \lambda^{-k} \qquad (k \geqq 0),$$

(2.5) $$b_{m1} = 0 \qquad (m \geqq 1),$$

et

$$(m+2\lambda)b_{m2} = a_m + \cdots,$$

les termes non écrits ne dépendant que de $a_1, \ldots, a_{m-1}$. Si donc on pose

(2.6) $$b_{mn} = F_{mn}(\lambda, a_1, \ldots, a_m)/(m+n\lambda),$$

(2.7) $$F_{mn} = B_{mn}(\lambda)a_m + R_{mn}(\lambda, a_1, \ldots, a_{m-1}),$$

on a

(2.8) $$B_{m2}(\lambda) = 1 \qquad (m \geqq 1).$$

En portant les expressions (2.6) dans (2.3), nous obtenons

(2.9) $$B_{mn}(\lambda) = 2\sum_{\mu+\nu=n-1} b_{0\mu}B_{m\nu}(\lambda)/(m+\nu\lambda) + \sum_{\mu+\nu+\rho=n-2} b_{0\mu}b_{0\nu}b_{0\rho}$$

pour $m\geqq 1$, $n\geqq 3$. On en conclut que $B_{mn}(\lambda)$ *est une fonction rationnelle de* λ *dont les pôles sont* $0, -m/2,\dots, -m/(n-1)$. *On a de plus*

$$B_{mn}(-m/n)\neq 0 \qquad (m\geqq 1,\ n\geqq 3). \tag{2.10}$$

En effet, si l'on pose

$$C_{mn}(\lambda)=\lambda^{n-2}B_{mn}(\lambda), \tag{2.11}$$

on a

$$C_{m2}(\lambda)=1$$

et

$$C_{mn}(\lambda)=2\lambda\sum_{\nu=2}^{n-1}C_{m\nu}(\lambda)/(m+\nu\lambda)+n(n-1)/2$$

pour $n\geqq 3$. On en déduit sans peine

$$C_{mn}(\lambda)=C_{mn-1}(\lambda)(m+(n+1)\lambda)/(m+(n-1)\lambda)+(n-1).$$

Si donc on pose

$$H_{mn}(\lambda)=(m+(n+1)\lambda)/(m+(n-1)\lambda), \tag{2.12}$$

on a

$$\begin{aligned} C_{mn}=&(n-1)+(n-2)H_{mn}+(n-3)H_{mn}H_{mn-1}+\cdots\\ &+(n-\nu-1)H_{mn}H_{mn-1}\dots H_{mn-\nu+1}+\cdots\\ &+2H_{mn}H_{mn-1}\dots H_{m4}+H_{mn}H_{mn-1}\dots H_{m3}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

On a par suite

$$C_{mn}(-m/n)=(n-1)+(n-2)H_{mn}(-m/n)=1,$$

ce qui démontre (2.10).

Quant à la fonction R_{mn} *dans (2.7), elle est un polynome de* $a_1,\dots,a_{m-1}$ *dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de* λ *n'admettant ses pôles qu'en* 0 *et* $-k/h$ $(k+h<m+n)$.

3. Nous pouvons prendre, d'après ce qui précède, une série entière (2.2) telle que

$$F_{mn}(-m/n, a_1, a_2,\dots, a_m)\neq 0, \tag{3.1}$$

où (m, n) parcourt à toutes les paires d'entiers positifs sans facteurs communs. Par exemple, étant donnée une série entière

$$b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m+\cdots, \tag{3.2}$$

il suffit de poser $a_m=e_mb_m$ pour $b_m\neq 0$ et $a_m=d_m$ pour $b_m=0$, où les e_m sont des constantes telles que $|e_m|=1$, et les d_m sont des nombres non nuls arbitrairement petits. Puis nous déterminons une suite croissante d'entiers positifs $\{\alpha_n\}$ de manière que

$$|F_{P_nQ_n}(\lambda, a_1,\dots, a_{P_n})|>P_n^{P_n}Q_n^{Q_n}/\alpha_{n+1} \tag{3.3}$$

pour

$$|\lambda+P_n/Q_n|<1/\alpha_{n+1}, \tag{3.4}$$

P_n/Q_n désignant la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue

$$\mu_0=\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2+}\,\frac{1}{\alpha_3+}\cdots+\frac{1}{\alpha_n+}\cdots\ . \tag{3.5}$$

Si l'on pose $\lambda=-\mu_0$, on aura

$$|b_{P_nQ_n}|>P_n^{P_n}Q_n^{Q_n}$$

et la série formelle (1.2) est divergente. *Nous sommes ainsi arrivés* *à une équation différentielle (2.1) dont la solution formelle (1.2) diverge.*

4. Au numéro précédent, nous avons déterminé λ et les a_m à la fois. Cette méthode a beaucoup d'analogie avec celle de M. G. A. Pfeiffer. Mais, il y a une autre méthode qui ressemble à celle de M. H. Cremer.

Soient donnés tout d'abord un nombre négatif irrationnel λ et une série entière (3.2) satisfaisant aux inégalités

(4.1) $$|b_{m_i}/(m_i+n_i\lambda)| > K m_i^{m_i} n_i^{n_i} \quad (i=1, 2, \dots)$$

pour les suites croissantes d'entiers positifs $\{m_i\}$ et $\{n_i\}$, K étant une constante positive indépendante de i. En vertu de (2.7), on a aisément l'inégalité

(4.2) $$|b_{m_i n_i}(\lambda, b_1, \dots, b_{m_i})| \geqq |B_{m_i n_i}(\lambda) b_{m_i}/(m_i+n_i\lambda)|$$

ou

(4.3) $$|b_{m_i n_i}(\lambda, b_1, \dots, b_{m_i-1}, -b_{m_i})| \geqq |B_{m_i n_i}(\lambda) b_{m_i}/(m_i+n_i\lambda)|.$$

D'autre part, si i est assez grand, on a sans peine

(4.4) $$|H_{m_i n_i}(\lambda)| < 3/2;$$

(4.5) $$|(n_i-1)+(n_i-2)H_{m_i n_i}(\lambda)| > 1/2;$$

(4.6) $$|H_{m_i n_i-1}(\lambda)/(m_i+n_i\lambda)| < 2/3\,|\lambda|;$$

(4.7) $$|H_{m_i n_i-k}(\lambda)| < 1 \quad (k=2, 3, \dots, n_i-3).$$

Par conséquent, si i est assez grand, on a l'inégalité

(4.8) $$|b_{m_i n_i}(\lambda, b_1, \dots, b_{m_i})| > K m_i^{m_i} n_i^{n_i}/3\,|\lambda|^{n_i-2}$$

ou

(4.9) $$|b_{m_i n_i}(\lambda, b_1, \dots, b_{m_i-1}, -b_{m_i})| > K m_i^{m_i} n_i^{n_i}/3\,|\lambda|^{n_i-2}.$$

Si donc on pose $a_m = b_m$ ou $-b_m$ convenablement, on aura

$$|b_{m_i n_i}| > K m_i^{m_i} n_i^{n_i}/3\,|\lambda|^{n_i-2}$$

et la série formelle (1.2) est divergente.

5. Jusqu'ici nous avons cherché, en supposant $p(x)$ holomorphe en x, une équation différentielle (2.1) dont la solution formelle (1.2) est divergente. Voyons maintenant que $p(x)$ *peut se choisir comme une fonction rationnelle de x.* Pour cela, il suffit de prendre une constante a telle que

(5.1) $$F_{mn}(-m/n, a, \dots, a) \neq 0$$

pour toutes les paires d'entiers positifs (m, n) sans facteurs communs. Cela est toujours possible, car, en vertu de (2.10), $F_{mn}(-m/n, a, \dots, a)$ est un polynome de a ne s'annulant pas identiquement. Cela posé, déterminons une suite croissante d'entiers positifs $\{\alpha_n\}$ de la même manière qu'au n° 3. Alors, on aura de nouveau

$$|b_{P_n Q_n}| > P_n^{P_n} Q_n^{Q_n}$$

pour l'équation différentielle

(5.2) $$xy' = -\mu_0 y + y^2 + axy^3/(1-x),$$

et la solution formelle (1.2) diverge. *Nous avons ainsi obtenu une équation différentielle (1.1), dont la solution formelle (1.2) est divergente et dont le second membre est un polynome de y et une fonction* *rationnelle de x.* Donc, notre but est complètement achevé.

6. Nos résultats peuvent s'étendre sans aucune modification essentielle pour les équations différentielles de la forme

$$xy' = \lambda y + p_2(x)y^2 + p_3(x)y^3 + \cdots + p_n(x)y^n, \tag{6.1}$$

où λ est un nombre irrationnel et les $p_k(x)$ sont des séries entières de x, satisfaisant aux conditions

$$p_2(0) \neq 0,$$
$$p_k(0) = 0 \qquad (k=3, 4, \ldots, n).$$

J'ai profité beaucoup des travaux de MM. H. Cremer, G. A. Pfeiffer, et H. Poincaré. Les conditions (4.1) ont été essentielles également pour l'exemple de M. H. Dulac.

Qu'il me soit permis, en terminant, d'exprimer à M. le Prof. Masuo Hukuhara toute ma reconnaissance pour les conseils qu'il m'a donnés au présent problème.

Références

H. Cremer: Über die Häufigkeit der Nichtzentren, Math. Ann., **115**, 573–580 (1938).

H. Dulac: Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, Jour. L'Éc. Poly., II, **9**, 1–125 (1904).

G. A. Pfeiffer: On the conformal mapping of curvilinear angles. The functional equation $\phi[f(x)] = a_1\phi(x)$, Trans. Amer. Math. Soc., **18**, 185–198 (1917).

H. Poincaré: Sur les courbes définies par les équations différentielles, Ch. XIX, Oeuvres de H. Poincaré, I, Paris (1928).

T. Saitô: Sur les solutions autour d'un point singulier fixe des équations différentielles du premier ordre, Kôdai Math. Sem. Rep., No. 4, Dec., 121–126 (1953).

C. L. Siegel: On the integrals of canonical systems, Ann. Math., **42**, 806–822 (1941).

——: Iteration of analytic functions, Ann. Math., **43**, 607–612 (1942).

——: Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 21–30 (1952).

——: Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, Math. Ann., **128**, 144–170 (1954).