29. *Sur les Valeurs Propres des Endomorphismes de l'Espace Vectoriel*

Par Masuo HUKUHARA
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., March 12, 1955)

Soient $\mathfrak{R}$ un espace vectoriel sur un corps de nombres complexes, K un endomorphisme de $\mathfrak{R}$ et $f(\lambda)$ un polynome. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines distinctes de multiplicités $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de l'équation $f(\lambda)=\rho_0$. Etant donné un endomorphisme quelconque L, nous désignerons par $N^m[L; \lambda]$ le sous-espace défini par

$$N^m[L; \lambda]=\{x; (L-\lambda I)^m x=o\}.$$

Si $H=f(K)$, le sous-espace $N^m[H; \rho_0]$ est la somme directe des sous-espaces $N^{m\mu_k}[K; \lambda_k]$:

$$N^m[H; \rho_0]=\sum_{k=1}^{n} N^{m\mu_k}[K; \lambda_k]. \tag{1}$$

Cette relation, que nous allons démontrer dans la suite, généralise et précise les résultats de MM. Vivanti-Schwank[1] et de M. T. Sato.[2]

Démontrons d'abord que le premier membre de (1) contient le second. Pour cela, prenons un vecteur quelconque x de $N^{m\mu_k}[K; \lambda_k]$. On a alors

$$(K-\lambda_k I)^{m\mu_k} x=o.$$

λ_k étant une racine de multiplicité μ_k de $f(\lambda)=\rho_0$, on peut écrire

$$f(\lambda)-\rho_0=(\lambda-\lambda_k)^{\mu_k} f_1(\lambda),$$

où $f_1(\lambda)$ est un polynome ne s'annulant pas en λ_k. On a alors

$$(f(K)-\rho_0 I)^m x=f_1(K)^m (K-\lambda_k I)^{m\mu_k} x=o,$$

ce qui démontre $x \in N^m[H; \rho_0]$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, nous remarquons que K satisfait à l'équation algébrique

$$(f(K)-\rho_0 I)^m=O$$

dans le sous-espace $\mathfrak{R}'=N^m[H; \rho_0]$. On peut donc appliquer le théorème 23.2 de mon article antérieur.[3] Par conséquent, on a

$$K=\begin{pmatrix} K_1 & O & \cdots & O \\ O & K_2 & \cdots & O \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ O & O & \cdots & K_n \end{pmatrix},$$

---

1) Vivanti-Schwank: Lineare Integralgleichungen, 1929.

2) Tunezo Sato: On eigenvalues of iterated kernels, Proc. Phys.-Math. Soc., Japan, **23**, 4–7 (1941).

3) Masuo Hukuhara: Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel, Journ. Fac. Sci., Univ. Tokyo, **7**, 129–192 (1954).

$$K_k = \begin{pmatrix} \lambda_k I + E_1 & O & \cdots & O \\ O & \lambda_k I + E_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & \lambda_k I + E_{m\mu_k} \end{pmatrix};$$

$K_1, \ldots, K_n$ sont des endomorphismes définis respectivement dans des sous-espaces $M_1, \ldots, M_n$ dont la somme directe est $\mathfrak{R}'$. On a de plus $(K_k - \lambda_k I)^{m\mu_k} = O$, car $E_s^s = O\ (s = 1, 2, \ldots)$. On en conclut que l'on a

$$M_k \subseteqq N^{m\mu_k}[K;\ \lambda_k].$$

Le second membre de la relation (1) contient donc le premier.