76. Über die Frattini-Gruppe einer endlichen Gruppe

Von Noboru ITÔ
Mathematisches Institut der Nagoya Universität
(Comm. by K. SHODA, M.J.A., June 13, 1955)

Das Ziel der vorliegenden Note ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz. Sei G eine endliche Gruppe, H eine nachinvariante Untergruppe von G.[1] Genau dann ist H nilpotent, wenn die Frattini-Gruppe $F(G)$ von G die Kommutatorgruppe H' von H umfasst.

Den wohlbekannten Fall $H=G$ verdankt man Herrn Wielandt [2].[2] Kürzlich bewies Herr Huppert den Satz für $H=G'$ [1].

Wir schicken voraus:

Hilfssatz. Sei G eine endliche Gruppe, H eine nachinvariante nilpotente Untergruppe von G. Dann gibt es einen nilpotenten Normalteiler K von G, der H umfasst.

Beweis. Sei K^* eine maximale nilpotente nachinvariante Untergruppe von G, welche H umfasst. Ist K^* in G normal, so sind wir fertig. Ist K^* nicht normal in G, so gibt es zwei nachinvariante Untergruppen N_1 und N_2 von G mit $K^* \subsetneqq N_2 \subsetneqq N_1$, derart, dass K^* in N_2 invariant ist, in N_1 aber nicht. Dann gibt es eine in N_1 zu K^* konjugierte Untergruppe K^{**}, welche von K^* verschieden ist. Offenbar K^*K^{**} ein nilpotenter Normalteiler von N_2, welcher K^* eigentlich umfasst. Da K^*K^{**} in G nachinvariant ist, widerspricht dies der Maximaleigenschaft von K^*. Also ist K^* invariant in G.

Beweis des Satzes. (1) Zunächst nehmen wir an, dass H nilpotent ist, aber H' nicht in $F(G)$ liegt. Nach dem Hilfssatz dürfen wir annehmen, dass H ein Normalteiler von G ist. Ferner gibt es nach unserer Annahme eine maximale Untergruppe M von G, so dass $G=MH'$, woraus $H=M\frown H\cdot H'$ folgt. Sei p ein beliebiger Primteiler der Ordnung von H und seien H_p, $(M\frown H)_p$ und $(H')_p$ bzw. p-Sylowgruppen von H, $M\frown H$, und H'. Da H nilpotent ist, haben wir $H_p=(M\frown H)_p\cdot(H')_p$ und $(H_p)'=(H')_p$. Daher ist $H_p=(M\frown H)_p\cdot(H_p)'$, woraus $H_p=(M\frown H)_p$ folgt, da $F(H_p)$ ja $(H_p)'$ umfasst. Dann muss M die Gruppe H, also auch H' umfassen, was ein Widerspruch gegen unsere Annahme ist.

---

1) Die Untergruppe H der Gruppe G wollen wir nachinvariant nennen, wenn sie in irgendeiner Normalreihe von G liegt. (Wielandt: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, Math. Z., **45**, 209–244 (1939)).

2) Vgl. auch Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. I, Leipzig-Berlin (1937).

(2) Nun nehmen wir an, dass H' in $F(G)$ liegt. Dann ist $HF(G)/F(G)$ eine abelsche nachinvariante Untergruppe von $G/F(G)$. Nach dem Hilfssatz gibt es einen nilpotenten Normalteiler $K/F(G)$ von $G/F(G)$, welcher $HF(G)/F(G)$ umfasst. Sei p ein beliebiger Primfaktor der Ordnung von K und K_p eine p-Sylowgruppe von K. Dann ist $K_pF(G)$ in G normal. Nach einem Sylowschen Satz haben wir $G=N(K_p)\cdot K_pF(G)=N(K_p)\cdot F(G)=N(K_p)$, wobei $N(K_p)$ der Normalisator von K_p in G ist. Also ist K_p in G normal. Das zeigt die Nilpotenz von K und daher auch diejenige von H.

Bemerkung. 1. Die Gruppe G werde von den Elementen a_1, a_2, a_3, und b erzeugt, die den Relationen

$$a_1^4=a_2^4=a_3^4=b^3=1,\ b^{-1}a_1b=a_2,\ b^{-1}a_2b=a_3,\ b^{-1}a_3b=a_1$$

genügen. Die Elemente a_1^2, a_2^2, und a_3^2 erzeugen dann die Frattini-Gruppe $F(G)$ von G. Sei $H=\{F(G), b\}$. Man kann sich leicht überzeugen, dass H nicht nilpotent ist, aber $F(G)H'$ umfasst.

2. G sei die symmetrische Gruppe des Grades 4. Dann $F(G)=1$. Aber jede 2-Sylowgruppe H von G ist nicht abelsch.

Damit sehen wir die Unentbehrlichkeit der Annahme, dass H eine nachinvariante Untergruppe von G ist.

Referenzen

[1] Huppert, B.,: Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math. Z., **60**, 409–434 (1954).

[2] Wielandt, H.,: Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen, Math. Z., **41**, 281–282 (1936).