118. Einfacher Beweis eines Brauerschen Satzes über Gruppencharaktere

Von Keizo ASANO

(Comm. by K. SHODA, M.J.A., Oct. 12, 1955)

Der Zweck dieser Note ist den folgenden fundamentalen Satz von R. Brauer[1] elementar zu beweisen:

Jeder Charakter χ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ kann aus den von Charakteren ω der elementaren Untergruppen[2] *induzierten Charakteren ω^* ganzzahlig linear kombiniert werden.*

Gleichzeitig beweisen wir auch den folgenden Brauerschen Satz.[3]

Eine auf $\mathfrak{G}$ definierte komplex-wertige Funktion θ ist dann und nur dann ein verallgemeinerter Charakter von $\mathfrak{G}$, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.

(1) *θ ist eine Klassenfunktion, d.h. $\theta(s)=\theta(t^{-1}st)$ $(s, t \in \mathfrak{G})$.*

(2) *Für jede elementare Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ ist θ auf $\mathfrak{H}$ betrachtet ein verallgemeinerter Charakter von $\mathfrak{H}$.*

Es seien im folgenden

$\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe der Ordnung g,

ζ eine primitive g-te Einheitswurzel,

p eine Primzahl,

$$g=p^r g', \qquad (g', p)=1,$$

I der Ring der ganzen rationalen Zahlen,

I_p der Ring der p-ganzen rationalen Zahlen,

$\mathfrak{R}$ der Charakterring von $\mathfrak{G}$,

$\mathfrak{R}_0$ der von allen oben genannten Charakteren ω^* erzeugte Modul.

Hilfssatz 1. ψ sei eine auf $\mathfrak{G}$ definierte Klassenfunktion mit $\psi(s) \in I_p[\zeta]$ für jedes s aus $\mathfrak{G}$. Ist $\psi(s)\equiv 0 \pmod{p^r}$, so ist $\psi \in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$. Ist insbesondere $(p, g)=1$ so gehört jedes ψ zu $I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$.

Diesen Beweis habe ich im vorigen Jahre in meiner Vorlesung über Gruppencharaktere in Nagoya Universität vorgetragen. Als Prof. Brauer nach dem internationalen Symposium über algebraische Zahlentheorie Osaka Universität besuchte, hatte ich eine günstige Gelegenheit diesen Beweis mit ihm zu besprechen. Er sagte mir, dass er und Tate denselben Beweis erhalten haben. Wie Prof. Brauer freundlich bemerkte, ist mein Beweis ganz ähnlich wie ihrer, obwohl die beiden Beweise völlig unabhängig erhalten wurden.

1) R. Brauer: On Artin's L-series with general group characters, Ann. Math., **48**, 503 (1947).

2) Eine Untergruppe heisst elementar, wenn sie ein direktes Produkt einer zyklischen Gruppe und einer p-Gruppe.

3) R. Brauer: A characterization of the characters of groups of finite order, Ann. Math., **57**, 357 (1953).

Beweis. Es seien $C_i\ (i=1,\dots,k)$ die konjugierten Klassen und c sei ein Element aus C_i der Ordnung n. Die zyklische Gruppe (c) besitzt n lineare Charaktere λ. Setzt man $\mu_i=\sum_\lambda \lambda(c^{-1})\lambda$, so gilt

$$\mu_i(c)=n,\quad \mu_i(c')=0,\ c'\in(c),\ c'\neq c.$$

Es ist $\mu_i^*=\sum_\lambda \lambda(c^{-1})\lambda^*\in I[\zeta]\mathfrak{R}_0$ und

$$\mu_i^*(c)=\frac{1}{n}\sum_{x\in\mathfrak{G}}\mu_i(x^{-1}cx)=\frac{1}{n}n(\mathfrak{N}_c:1)=(\mathfrak{N}_c:1),$$

wobei natürlich $\mu_i(y)=0\ (y\notin(c))$ ist und $\mathfrak{N}_c$ den Zentralizator von c bedeutet. Setzt man $\varepsilon_i=(\mathfrak{N}_c:1)^{-1}\mu_i^*\ (i=1,\dots,k)$, so gilt

$$\varepsilon_i(s)=\begin{cases}1 & s\in C_i\\ 0 & s\notin C_i,\end{cases}$$

$$p^r\varepsilon_i=(p^r/(\mathfrak{N}_c:1))\mu_i^*\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0.$$

Man erhält also für ein c_i aus C_i

$$\psi=\sum_{i=1}^k\psi(c_i)\varepsilon_i=\sum(\psi(c_i)/p^r)p^r\varepsilon_i\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0.$$

Hilfssatz 2. Es sei $p\mid g$ und $\varphi\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}$. Dann ist für jedes s aus $\mathfrak{G}$

$$\varphi(s)^{p^{n+r-1}}\equiv\varphi(s_0)^{p^{n+r-1}}\pmod{p^n},$$

wo s_0 der p-reguläre Teil[4] von s ist.

Beweis. $x\to M(x)$ sei eine beliebige Darstellung mit dem Charakter χ. Bedeuten $\omega_i\ (i=1,\dots,m)$ die Eigenwerte von $M(s_0)$, so sind die Eigenwerte von $M(s)$ $\omega_i\rho_i\ (i=1,\dots,m)$, wobei $\rho_i^{p^r}=1$. Also

$$\chi(s_0)=\sum_i\omega_i,\quad \chi(s)=\sum_i\omega_i\rho_i$$

$$\chi(s_0)-\chi(s)=\sum_i\omega_i(1-\rho_i)\equiv 0\pmod{(1-\rho)},$$

wo ρ eine primitive p^r-te Einheitswurzel ist; folglich gilt

$$\varphi(s)\equiv\varphi(s_0)\pmod{(1-\rho)}.$$

Es ist bekanntlich $pI_p[\zeta]=(1-\rho)^{p^r-p^{r-1}}I_p[\zeta]$, demnach ist

$$\varphi(s)^{p^r}=(\varphi(s_0)+\gamma(1-\rho))^{p^r}\equiv\varphi(s_0)^{p^r}\pmod{p}.$$

Nach Induktion von n erhält man

$$\varphi(s)^{p^{r+n-1}}\equiv\varphi(s_0)^{p^{r+n-1}}\pmod{p^n}.$$

Beweis des Satzes.[5] Es sei $\tilde{\mathfrak{R}}$ der Ring, der aus allen komplexwertigen Klassenfunktionen θ auf $\mathfrak{G}$ besteht, derart, dass θ auf jeder elementaren Untergruppe $\mathfrak{H}$ betrachtet ein verallgemeinerter Charakter von $\mathfrak{H}$ ist. Es ist offenbar $\mathfrak{R}_0\subseteq\mathfrak{R}\subseteq\tilde{\mathfrak{R}}$.

$\mathfrak{R}_0$ ist ein Ideal von $\tilde{\mathfrak{R}}$. Denn bedeutet ω einen Charakter einer

4) Jedes Element s lässt sich für eine Primzahl p in der Form $s=s_0t=ts_0$ darstellen, so dass die Ordnung von s_0 mit p teilerfremd und die von t eine Potenz von p ist; s_0 sowie t ist dabei eindeutig bestimmt und zwar eine Potenz von s. s_0 heisst der p-reguläre Teil von s.

5) Vgl. P. Roquette: Arithmetische Untersuchung des Charakterringes einer endlichen Gruppe, Crelles Journ., **190**, 148–168 (1952), sowie E. Witt: Die algebraische Struktur des Gruppenringes einer endlichen Gruppe über einem Zahlkörper, Crelles Journ., **190**, 231–245 (1952).

elementaren Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, so ist $\omega\theta$ auf $\mathfrak{H}$ betrachtet ein verallgemeinerter Charakter von $\mathfrak{H}$ und es ist für jedes s aus $\mathfrak{G}$

$$\omega^*\theta(s)=\omega^*(s)\theta(s)=1/(\mathfrak{H}:1)\sum_{x\in\mathfrak{G}}\omega(x^{-1}sx)\theta(s)$$
$$=1/(\mathfrak{H}:1)\sum_{x}\omega\theta(x^{-1}sx)=(\omega\theta)^*(s),\ [\omega(y)=0,\ y\notin\mathfrak{H}]$$

also $\omega^*\theta=(\omega\theta)^*\in\mathfrak{R}_0$. Beweist man $\chi_0\in\mathfrak{R}_0$ für den Einscharakter χ_0 von $\mathfrak{G}$, so erhält man $\mathfrak{R}_0=\mathfrak{R}=\tilde{\mathfrak{R}}$.

Dann und nur dann ist $\chi_0\in\mathfrak{R}_0$, wenn es gilt $\chi_0\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$ für jedes p. Denn $\mathfrak{R}_0$ besitzt k linear unabhängige Funktionen, wo k die Anzahl der konjugierten Klassen ist, weil $I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$ $p^r\varepsilon_i$ $(i=1,\dots,k)$ enthält. Bedeutet $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ eine I-Basis von $\mathfrak{R}_0$, so ist

$$\chi_0=c_1\varphi_1+\cdots+c_k\varphi_k$$

mit den rationalen Koeffizienten c_i. Wegen $\chi_0\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$ gilt $c_i\in I_p[\zeta]$ für jedes p, also $c_i\in I[\zeta]$ und somit $c_i\in I$, $\chi_0\in\mathfrak{R}_0$.

Im Falle $(p,g)=1$ ist nach Hilfssatz 1 $\chi_0\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$. Wir beweisen nun $\chi_0\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$ im Falle $p\mid g$. Es seien C_i $(i=1,\dots,k')$ die konjugierten Klassen der p-regulären Elemente. c sei ein Element aus C_i der Ordnung n und $\mathfrak{P}$ sei eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{N}_c$. Ein linearer Charakter λ der zyklischen Gruppe (c) kann als ein linearer Charakter von $\mathfrak{H}=(c)\mathfrak{P}$ betrachtet werden, wenn man definiert $\lambda(c^ty)=\lambda(c)^t$ $(y\in\mathfrak{P})$. Setzt man $\mu=1/n\sum_{\lambda}\lambda(c^{-1})\lambda$, so ist für jedes y aus $\mathfrak{H}$

$$\mu(y)=\begin{cases}1 & y\in c\mathfrak{P}\\ 0 & y\notin c\mathfrak{P},\end{cases}$$

$$\mu^*(c)=1/(\mathfrak{H}:1)\sum_{x\in\mathfrak{G}}\mu(x^{-1}cx)=(\mathfrak{N}_c:1)/(\mathfrak{H}:1)=(\mathfrak{N}_c:(c)\mathfrak{P})\not\equiv 0 \pmod p.$$

Es gilt also,

$$\varphi_i=(\mathfrak{N}_c:\mathfrak{H})^{-1}\mu^*=1/n(\mathfrak{N}_c:\mathfrak{H})\sum_{\lambda}\lambda(c^{-1})\lambda^*\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0,$$

und für jedes p-reguläre Element s_0

$$\varphi_i(s_0)=\begin{cases}1 & s_0\in C_i\\ 0 & s_0\notin C_i\end{cases}$$

$\varphi=\sum_{i=1}^{k'}\varphi_i$ hat die Eigenschaft, dass $\varphi\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$ und für jedes p-reguläre Element s_0 aus $\mathfrak{G}$ $\varphi(s_0)=1$. Nach Hilfssatz 2 ist also für jedes Element s von $\mathfrak{G}$

$$\varphi(s)^{p^{2r-1}}\equiv 1 \pmod{p^r}.$$

Nach Hilfssatz 1 $\chi_0-\varphi^{p^{2r-1}}\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$, also

$$\chi_0=\varphi^{p^{2r-1}}+(\chi_0-\varphi^{p^{2r-1}})\in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0.$$

Damit ist der Beweis vollendet.