133. Quelques Conditions pour la Normabilité d'un Espace Localement Convexe

Par Shouro KASAHARA
Université de Kobe
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Oct. 12, 1956)

1. Introduction. Soient E et F deux espaces vectoriels localement convexes sur le corps des nombres réels. Nous désignons par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, et par $\mathfrak{L}(E, F)$ un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{L}(E, F)$ contenant toutes les applications linéaires continues de rang fini. Récemment, MM. A. Blair [1], J. H. Williamson [4] et l'auteur [2] ont montré indépendamment que si l'application $(u, v) \to u \circ v$ de $\mathfrak{L}(E, E) \times \mathfrak{L}(E, E)$ dans $\mathfrak{L}(E, E)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties bornées de E, l'espace E est normable. Le but du n° 2 de cette note est de donner une généralisation de cette proposition. D'autre part, dans une Note antérieure [3], nous avons prouvé que l'espace E est normable si l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre $\mathfrak{L}(E, E)$ est ouvert pour la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties bornées de E. Concernant ce fait, nous donnerons dans le n° 3 quelques résultats sur des ensembles d'éléments spécifiques de $\mathfrak{L}(E, F)$.

Dans la suite, nous considérons seulement les espaces vectoriels sur le corps des nombres réels, et nous suivons, de façon générale, la terminologie des "Éléments" de M. N. Bourbaki. Soit A (resp. V) une partie de E (resp. F); nous désignons par $W(A, V)$ l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que l'on ait $u(x) \in V$ quel que soit $x \in A$, et par $\widetilde{W}(A, V)$ la trace de $W(A, V)$ sur $\mathfrak{L}(E, F)$: $\widetilde{W}(A, V) = W(A, V) \frown \mathfrak{L}(E, F)$. Lorsque $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E, nous dénotons par $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ l'espace $\mathfrak{L}(E, F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties $A \in \mathfrak{S}$. Nous écrirons p_V la jauge d'un tonneau V, i.e. $p_V(x) = \inf_{\lambda > 0, x \in \lambda V} \lambda$.

2. La continuité de l'application $(u, v) \to u \circ v$. Pour démontrer la Proposition 1 nous utilisons le lemme suivant qui a été prouvé dans [2] (voir le Lemme 1).

LEMME. *Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, un disque*) borné et fermé de E qui ne se réduit pas à 0, et V un*

*) Une partie d'un espace vectoriel est dite *disquée* ou un *disque* si elle est convexe et cerclée.

tonneau dans F. *Soit* $a \neq 0$ *un élément quelconque de* A, *pour tout* $y \in F$ *satisfaisant à* $p_V(y) < \pi(a) = \inf_{\lambda>0, a\in\lambda A} \lambda$, *il existe une application linéaire continue* $u \in \widetilde{W}(A, V)$ *telle que* $u(a) = y$.

PROPOSITION 1. *Soient* E, F *et* G *trois espaces localement convexes séparés. S'il existe deux disques bornés et fermés* A, C *dans* E *et un disque borné et fermé* B *dans* F, *le premier ne se réduisant pas à* 0, *et de plus deux tonneaux* $V(\neq G)$, U *dans* G *et un tonneau* N *dans* F *tels que* $W(A, V) \supset \widetilde{W}(B, U) \circ \widetilde{W}(C, N)$, *le disque* B *absorbe le tonneau* N.

On est ramené aussitôt au cas où $V \supset U$. Montrons d'abord que la partie B est absorbante. S'il n'était pas ainsi, il existerait un point $b \in F$ tel que l'on ait $\lambda b \bar{\in} B$ pour tout $\lambda > 0$. Soit $a \neq 0$ un point de A; prenons une forme linéaire continue x' sur E telle que $\langle a, x' \rangle \neq 0$ et que $|\langle x, x' \rangle| < 1$ pour tout $x \in C$. Alors comme on peut le voir facilement, l'application linéaire continue $v : x \to \langle x, x' \rangle \dfrac{b}{p_N(b)}$ appartient à $\widetilde{W}(C, N)$ et transformerait a dans le complément de B. D'autre part, il existe un point c de G n'appartenant pas à V; comme $v(a)$ est contenu dans la droite engendrée par b, en vertu du théorème de Hahn-Banach, on pourrait prendre une forme linéaire continue y' sur F telle que $\langle \dfrac{p_V(c)}{p_U(c)} v(a), y' \rangle > 1$ et que $|\langle y, y' \rangle| < 1$ pour tout $y \in B$. Cela étant, l'application linéaire continue $u : y \to \langle y, y' \rangle \dfrac{c}{p_U(c)}$ satisferait aux conditions: $u \in \widetilde{W}(B, U)$ et $u \circ v(a) \bar{\in} V$, mais cela est absurde en vertu de l'hypothèse de notre proposition. Par conséquent, B est absorbant.

Montrons maintenant que la partie C absorbe tout point de A. On peut voir sans peine qu'il existe une application linéaire continue $u \in \widetilde{W}(B, U)$ et un point $b \bar{\in} B$ tels que l'on ait $u(b) \bar{\in} V$. Or, supposons qu'il existe un point $a \neq 0$ de A qui n'est pas absorbé par C; on pourrait prendre alors une forme linéaire continue x' sur E telle que $\langle \dfrac{a}{p_N(b)}, x' \rangle = 1$ et que $|\langle x, x' \rangle| < 1$ pour tout $x \in C$. Donc, si l'on pose $v : x \to \langle x, x' \rangle \dfrac{b}{p_N(b)}$, on aurait $v(C) \subset N$ et $v(a) = b$, d'où $u \circ v(a) \bar{\in} V$; ceci est également en contradiction avec l'hypothèse.

Cela étant, nous pouvons définir deux fonctions numériques $\pi(y)$ et $\pi'(x)$ sur F et sur l'espace vectoriel engendré par A respectivement, de telle façon que: $\pi(y) = \inf_{\lambda>0, y\in\lambda B} \lambda$, $\pi'(x) = \inf_{\lambda>0, x\in\lambda C} \lambda$.

Considérons un point arbitraire $a \neq 0$ de A, et prenons un point c de G tel que $p_V(c) > \dfrac{1}{\pi'(a)}$. Alors pour tout nombre positif μ inférieur à $\frac{1}{p_U(c)}$, l'ensemble μN est contenu dans B. En effet, s'il existait un point $y \in \mu N$ tel que $y \overline{\in} B$, on aurait $\pi(y) > 1$, et par suite $p_N\left(\frac{y}{\mu\pi(y)}\right) < 1$; comme $\pi'\left(\frac{a}{\pi'(a)}\right) = 1$, en vertu du lemme susmentionné, on pourrait trouver une application linéaire $v \in \widetilde{W}(C, N)$ telle que $v\left(\frac{a}{\pi'(a)}\right) = \frac{y}{\mu\pi(y)}$. De même, d'après le lemme, il existerait une application linéaire $u \in \widetilde{W}(B, U)$ telle que $u\left(\frac{y}{\pi(y)}\right) = \mu c$, puisque $\pi\left(\frac{y}{\pi(y)}\right) = 1 > p_U(\mu c)$; donc on en conclurait que $u \circ v(a) = \pi'(a) c \overline{\in} V$, contrairement à l'hypothèse de la proposition.

COROLLAIRE 1. *Dans la Proposition 1, si le tonneau N est un voisinage de 0, l'espace F est normable.*

Il en résulte aussitôt le

COROLLAIRE 2. *Soit $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$) un ensemble de parties bornées de E (resp. F). Pour que l'espace F soit normable il suffit que l'application $(u, v) \to u \circ v$ de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{T}}(F, G) \times \mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E, G)$ soit continue. Si $\mathfrak{T}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de F, la condition est aussi nécessaire.*

Le corollaire suivant est ce qui a été montré par M. J. H. Williamson dans le travail [4].

COROLLAIRE 3. *Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Si l'application $(u, x) \to u(x)$ de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, F) \times E$ dans F est continue, l'espace E est normable.*

Considérons en effet les duals faibles E' de E et F' de F. Comme $x \circ u = u'(x)$, l'hypothèse signifie que, pour tout voisinage disqué et fermé V de 0 dans F, il existe un disque borné fermé $A \in \mathfrak{S}$ et deux voisinages disqués et fermés U et N de 0 dans E et dans F respectivement tels que $U \circ W'(N^\circ, A^\circ) \subset V$, où $W'(N^\circ, A^\circ)$ est la trace de $W(N^\circ, A^\circ)$ sur l'espace $\mathfrak{L}'(F', E')$ des transposées u' de $u \in \mathfrak{L}(E, F)$; il suffit donc d'appliquer la Proposition 1.

3. Deux conditions suffisantes

PROPOSITION 2. *Soient E et F deux espaces localement convexes séparés. S'il existe une application $u \in \mathfrak{L}(E, F)$, un disque borné et fermé A de E et un voisinage disqué V de 0 dans F tels que toute application du type $u + w$, $w \in \widetilde{W}(A, V)$, est une application biunivoque de E dans F, l'espaces E et $\overline{u(E)}$ sont normable.*

En effet, l'application u étant continue, on peut prendre un voisinage disqué U de 0 dans E qui est contenu dans l'image réciproque de V par u. Pour montrer que l'espace E est normable, il suffit de prouver que U est contenu dans la partie bornée A. Supposons qu'il existe un point $a\in U$ n'appartenant pas à B; alors en vertu du théorème de Hahn-Banach, il existerait une forme linéaire continue x' sur E telle que $\langle a, x'\rangle=-1$ et que $|\langle x, x'\rangle|<1$ pour tout $x\in B$. Donc l'application linéaire continue $w: x\to\langle x, x'\rangle u(a)$ transformerait A en V, et par suite appartiendrait à $\widetilde{W}(A, V)$. Il s'ensuit de l'hypothèse de la proposition que l'application $u+w$ serait biunivoque, mais cela est absurde puisque $(u+w)(a)=0$ et $a\neq 0$.

Or, nous allons démontrer que le sous-espace $\overline{u(E)}$ de F est normable. Soit $\mathfrak{L}(\overline{u(E)}, F)$ le sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{L}(\overline{u(E)}, F)$ engendré par toutes les applications linéaires continues de rang fini et l'application identique e de $\overline{u(E)}$ sur lui-même. On peut voir facilement que l'application composée $v\circ u$ appartient à $\mathfrak{L}(E, F)$ pour tout $v\in\mathfrak{L}(\overline{u(E)}, F)$. En conséquence, pour tout $v\in\widetilde{W}(\overline{u(A)}, V)$, $v\circ u$ est un élément de $\widetilde{W}(A, V)$, donc par l'hypothèse l'application $(e+v)\circ u=u+v\circ u$ est biunivoque, et par suite $e+v$ l'est aussi. Le fait que $\overline{u(E)}$ est normable résulte donc de la première partie de la proposition, puisque $\overline{u(A)}$ est un disque borné et fermé de $\overline{u(E)}$.

COROLLAIRE 1. *Dans la Proposition 2, si u est une application de E sur F, l'espace F est aussi normable.*

COROLLAIRE 2. *Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Si, dans $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$, l'ensemble des applications inversibles à gauche est ouvert, E et $u(E)$ sont normable, où u est une application quelconque de $\mathfrak{L}(E, F)$ inversible à gauche.*

PROPOSITION 3. *Soient E et F deux espaces localement convexes séparés. S'il existe une application $u\in\mathfrak{L}(E, F)$ un disque borné et fermé A de E et un voisinage disqué V de 0 dans F tels que toute application du type $u+w$, $w\in\widetilde{W}(A, V)$, est une application de E sur F, l'espaces F et $E/u^{-1}(0)$ sont normable.*

Il est clair que $\overline{u(A)}$ est un disque borné et fermé de F. Montrons que le voisinage V est contenu dans $\overline{u(A)}$. Supposons pour cela le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un point $a\in V$ n'appartenant pas à $\overline{u(A)}$; alors on pourrait trouver une forme linéaire continue x' sur F telle que $\langle a, x'\rangle=-1$ et que $|\langle x, x'\rangle|<1$ pour tout $x\in u(A)$. Posons $v: x\to\langle x, x'\rangle a$; on voit aisément que $v(a)=-a$ et $v(u(A))\subset V$, et par suite $u+v\circ u$ serait une application linéaire continue de E *sur* F. Soit e l'application identique de F sur lui-même; en vertu de la relation $u+v\circ u=(e+v)\circ u$, on peut conclure que $e+v$ serait aussi une application linéaire continue de F *sur* lui-même. Il existerait donc un point $b\in F$ pour lequel $b+v(b)=a$; comme $v(b)=\langle b, x'\rangle a$, si l'on pose $\beta=\langle b, x'\rangle$, on aurait $b=(1-\beta)a$, d'où $a=0\in\overline{u(A)}$, ce qui est absurde.

Ainsi l'espace F est normable.

Soient φ l'application canonique de E sur $E/u^{-1}(0)$ et $\tilde{u}$ l'application de $E/u^{-1}(0)$ dans F déduite de u. Or, pour voir que l'espace quotient $E/u^{-1}(0)$ est normable, considérons le sous-espace vectoriel $\mathfrak{L}(E, E/u^{-1}(0))$ de l'espace $\mathcal{L}(E, E/u^{-1}(0))$ engendré par toutes les applications linéaires continues de rang fini et l'application φ; il est clair que l'application $\tilde{u}\circ v$ est un élément de $\mathfrak{L}(E, F)$ pour tout $v\in\mathfrak{L}(E, E/u^{-1}(0))$. Soit U un voisinage disqué de 0 dans $E/u^{-1}(0)$ tel que $\tilde{u}(U)\subset V$; pour tout $v\in\widetilde{W}(A, U)$, $\tilde{u}\circ v$ étant une application appartenant à $\widetilde{W}(A, V)$, $\tilde{u}\circ(\varphi+v)=u+\tilde{u}\circ v$ est une application de E *sur* F. Il en résulte donc que $\varphi+v$ est une application linéaire continue de E *sur* $E/u^{-1}(0)$, puisque l'application $\tilde{u}$ est biunivoque. Par conséquent, il suffit d'appliquer la première partie de la proposition.

COROLLAIRE 1. *Dans la Proposition 3, si u est biunivoque, l'espace E est aussi normable.*

COROLLAIRE 2. *Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Si, dans $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$, l'ensemble des applications inversibles à droite est ouvert, F et $E/u^{-1}(0)$ sont normable, où u est une application quelconque de $\mathfrak{L}(E, F)$ inversible à droite.*

Références

[1] A. Blair: Continuity of multiplication in operator algebras, Proc. Amer. Math. Soc., **6**, 209–210 (1955).

[2] S. Kasahara: Sur l'espace des endomorphismes continus de l'espace vectoriel localement convexe, Math. Japonicae, **3**, 111–116 (1955).

[3] S. Kasahara: Sur un théorème de Gelfand, Proc. Japan Acad., **32**, 131–134 (1956).

[4] J. H. Williamson: Two conditions equivalent to normability, Jour. London Math. Soc., **31**, 111–113 (1956).