37. *Sur les Groupes de Cobordisme Ω^k*

Par Masahisa ADACHI
Institut de Mathématiques, Université de Nagoya
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., March 12, 1957)

Nous allons calculer dans cette note les groupes de cobordisme Ω^k des variétés différentiables compactes orientées, pour $k=8$, 9 et 10. Nous prenons les définitions et notations de l'article de R. Thom.[1] Nous supposons n un entier pair plus grand que 11.

1. *Quelque calcul des groupes d'homotopie stables*[2] *du complexe de Thom $M(SO(n))$ associé au groupe de rotation $SO(n)$.*

A) Y_2 sera le produit des complexes d'Eilenberg-MacLane:

$$Y_2=K(Z,n)\times K(Z,n+4)\times K(Z_2,n+5)\times(K(Z,n+8))^2 \\ \times(K(Z_2,n+9))^2\times K(Z_2,n+10).$$

On peut trouver une application $F: M(SO(n))\rightarrow Y_2$, telle que $F^*: H^i(Y_2, Z_2)\rightarrow H^i(M(SO(n)), Z_2)$ soit un isomorphisme sur pour $i\leq n+10$ et biunivoque pour $i=n+11$, et $F^*: H^i(Y_2, Z_p)\rightarrow H^i(M(SO(n)), Z_p)$ soit un isomorphisme sur pour $i\leq n+11$ où p est un nombre premier ≥ 7. En appliquant la C-théorie de J. P. Serre,[3] on a:

Lemme 1. a) Les composantes 2-primaires de $\pi_{n+k}(M(SO(n)))$, pour $k=8$, 9 et 10, sont 0, Z_2+Z_2 et Z_2 respectivement. b) Toutes les composantes p-primaires de $\pi_{n+k}(M(SO(n)))$, pour $k=8$, 9 et 10, sont nulles, où p est un nombre premier ≥ 7.

B) On sait que le complexe $K(Z,n+8)$ est fibre d'un espace asphérique A, dont la base est le complexe $K(Z,n+9)$. Il existe une application φ du complexe $K(Z,n)$ dans $K(Z,n+9)$, telle que $\varphi^*(\iota_{n+9}) =St_5^9\iota_n\in H^{n+9}(Z,n;Z)$ où ι_n et ι_{n+9} sont les classes fondamentales de $K(Z,n)$ et $K(Z,n+9)$ respectivement. On désignera par L l'espace induit de l'espace fibré A par l'application φ. Y_5 sera le produit du complexe L par $K(Z,n+4)\times K(Z,n+8)$. On peut trouver une application $G: M(SO(n))\rightarrow Y_5$, telle que $G^*: H^i(Y_5,Z_5)\rightarrow H^i(M(SO(n)),Z_5)$ soit un isomorphisme sur pour $i\leq n+11$. En appliquant la C-théorie de J. P. Serre, on a:

Lemme 2. Toutes les composantes 5-primaires de $\pi_{n+k}(M(SO(n)))$, pour $k=8$, 9 et 10, sont nulles.

C) Soit B un espace fibré asphérique dont la base est le complexe $K(Z,n+5)$, et la fibre est le complexe $K(Z,n+4)$. Il existe

1) R. Thom: Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv., **28**, 17-86 (1954).

2) Cf. R. Thom 1) Théorème II. 7.

3) J. P. Serre: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Ann. Math., **58**, 258-294 (1953).

une application ψ du complexe $K(Z, n)$ dans $K(Z, n+5)$, telle que $\psi^*(\iota_{n+5})=St_3^5\iota_n \in H^{n+5}(Z, n; Z)$, où ι_{n+5} est la classe fondamentale de $K(Z, n+5)$. On désignera par K l'espace induit de l'espace fibré B par l'application ψ. On peut trouver une classe Δ de $H^{n+9}(K, Z)$, telle que:

1° $\rho_3(\Delta)=i^{*-1}\circ\rho_3\circ St_3^5\iota_{n+4}$, où ι_{n+4} est la classe fondamentale de la fibre $K(Z, n+4)$, ρ_3 est l'homomorphisme induit par la réduction mod 3 $\rho_3: Z\to Z_3$ et $i^*: H^{n+9}(K, Z_3)\to H^{n+9}(Z, n+4; Z_3)$ est l'isomorphisme induit par l'injection i de $K(Z, n+4)$ dans K,

2° $3^m\Delta=0$, où m est un entier >0.

Il existe une application λ de K dans $K(Z, n+9)$, telle que $\lambda^*(\iota_{n+9})=\Delta$. On désignera par M l'espace induit de l'espace fibré A par l'application λ. Y_3 sera le produit du complexe M par $K(Z, n+8)$. On peut trouver une application $H: M(SO(n))\to Y_3$, telle que $H^*: H^i(Y_3, Z_3)\to H^i(M(SO(n)), Z_3)$ soit un isomorphisme sur pour $i\leq n+11$. Donc on obtient:

Lemme 3. Toutes les composantes 3-primaires de $\pi_{n+k}(M(SO(n)))$, pour $k=8$, 9 et 10, sont nulles.

Lemmes 1, 2 et 3 donnent:

Théorème 1. *Les groupes d'homotopie stables* $\pi_{n+k}(M(SO(n)))$, *pour* $k=8$, 9 *et* 10, *sont*:

$$\pi_{n+8}(M(SO(n)))=Z+Z,\quad \pi_{n+9}(M(SO(n)))=Z_2+Z_2,\quad \pi_{n+10}(M(SO(n)))=Z_2.$$

2. *Les groupes* Ω^k. R. Thom a démontré le théorème suivant:[4]

Les groupes de cobordisme Ω^k *sont isomorphes aux groupes d'homotopie stables* $\pi_{n+k}(M(SO(n)))$ $(k<n)$.

La détermination des groupes d'homotopie $\pi_{n+k}(M(SO(n)))$, pour $k=8$, 9 et 10, donne:

Théorème 2. *Les groupes* Ω^k, *pour* $k=8$, 9 *et* 10, *sont*:

$$\Omega^8=Z+Z,\quad \Omega^9=Z_2+Z_2,\quad \Omega^{10}=Z_2.$$

Corollaire. *Si tous les nombres caractéristiques de Pontrjagin d'une variété différentiable compacte orientée* V^8 *sont nuls,* V^8 *est une variété-bord.*[5]

Générateurs de Ω^8 sont donnés par la classe de l'espace projectif complexe $PC(4)$ et la classe de l'espace produit de deux plans projectifs complexes $PC(2)\times PC(2)$. Générateurs de Ω^9 sont donnés par la classe de la variété de Dold[6] $P(1, 4)$ et la classe du produit de la variété de Wu $P(1, 2)$ par le plan projectif complexe $PC(2)$. Le générateur de Ω^{10} est la classe du produit de deux variétés de Wu $P(1,2)\times P(1,2)$.

---

4) Cf. R. Thom 1) Théorème IV. 8.

5) Cf. R. Thom 1) Corollaire IV. 16.

6) Cf. A. Dold: Erzeugende der Thomschen Algebra $\mathfrak{N}$, Math. Z., **65**, 25–35 (1956).